Svar på opgave 2015-159 November 2015

Opgaven:

Tallene *a*, *b* og *c* opfylder, at $a^2 + 2b^2 = 3c^2$. Vis, at tallet

$$\frac{a+2b+3c}{a+c}\cdot\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b-c}{b-a}\right)$$

er et naturligt tal.

Løsning:

Vi udregner parentesen:

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b-c}{b-a}$$

$$=\frac{(a+b)(b-a)+(b-c)(b+c)}{(b+c)(b-a)}$$ Sæt på fælles brøkstreg

$$=\frac{b^2-a^2+b^2-c^2}{(b+c)(b-a)}$$ Gang parenteserne ud i tælleren

$$=\frac{2b^2-a^2-c^2}{(b+c)(b-a)}$$ Reducér tælleren

$$=\frac{3c^2-a^2-a^2-c^2}{(b+c)(b-a)}$$ Benyt det givne, at $2b^2 = 3c^2 - a^2$

$$=\frac{2c^2-2a^2}{(b+c)(b-a)}$$ Reducér tælleren

$$=\frac{2\cdot(c-a)(c+a)}{(b+c)(b-a)}$$ Opløs tælleren i faktorer

Nu udregner vi *k*:

$k = \dfrac{a+2b+3c}{a+c} \cdot \dfrac{2(c-a)(c+a)}{(b+c)(b-a)}$

$= \dfrac{2\,(c-a)(a+2b+3c)}{(b+c)(b-a)}$ En fælles faktor i tæller og nævner forkortes

$= 2 \cdot \dfrac{ac+2bc+3c^2-a^2-2ab-3ac}{(b+c)(b-a)}$ Parenteserne i tælleren ganges ud

$= 2 \cdot \dfrac{ac+2bc+(a^2+2b^2)-a^2-2ab-3ac}{(b+c)(b-a)}$ Erstat $3c^2$ med $a^2 + 2b^2$, som er det givne

$= 2 \cdot \dfrac{-2ac+2bc+2b^2-2ab}{(b+c)(b-a)}$ Tælleren reduceres

$= 4 \cdot \dfrac{c(-a+b)+b(b-a)}{(b+c)(b-a)}$ c og b sættes uden for parentes og 2 sættes ned

$= 4 \cdot \dfrac{(b-a)(b+c)}{(b+c)(b-a)}$ b - a sættes uden for parentes i tælleren

$= 4$ Samme tal i tæller og nævner.

Vi har altså ved reduktioner fundet, at $k = 4$, dvs. et helt tal.