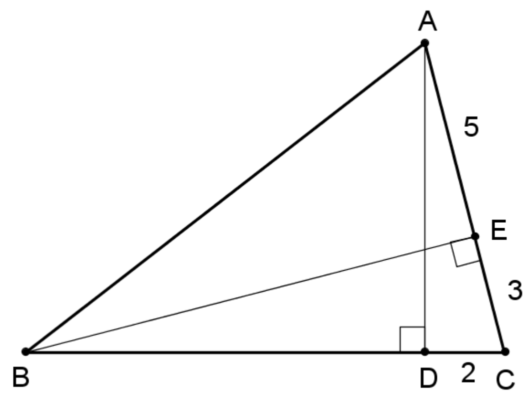
Svar på opgave 2015-160 December 2015

Opgaven:

I ΔABC er AD højden fra A og BE højden fra B.
Det oplyses, at $AE = 5$, $CE = 3$ og $DC = 2$.
Beregn BD.



Løsning:

Vi har, at

$$BE \cdot 8 = AD \cdot a \ ,$$

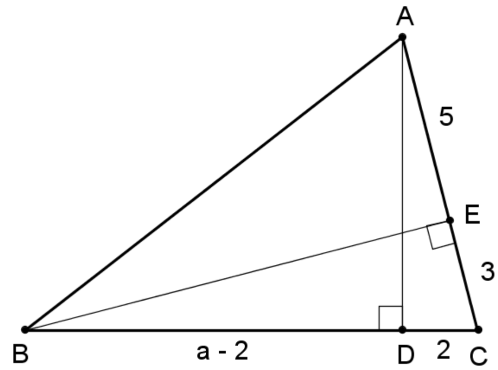
fordi begge sider af lighedstegnet angiver det dobbelte af trekantens areal: Højde gange grundlinje.

I ΔACD giver Pythagoras sætning

$$AD^2 + 2^2 = 8^2 \quad \Leftrightarrow \quad AD = \sqrt{60} = 2\sqrt{15} \ .$$

Altså får vi

$$BE \cdot 8 = 2\sqrt{15} \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad BE = \tfrac{1}{4}\sqrt{15} \cdot a \ .$$



I ΔBEC giver Pythagoras sætning

$$BE^2 + 3^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{16} \cdot 15 \cdot a^2 + 9 = a^2 \ .$$

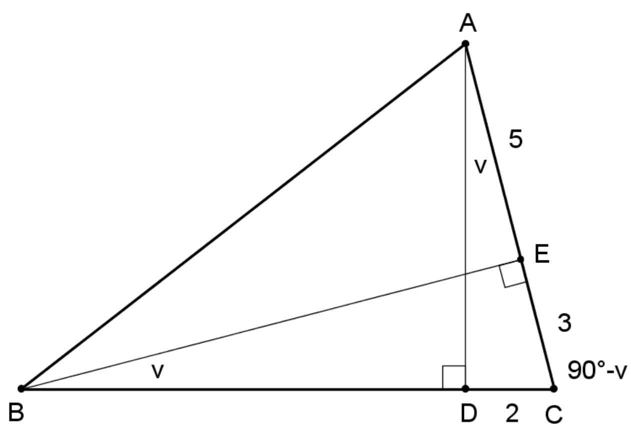
Vi ganger med 16 på begge sider og isolerer a:

$$15a^2 + 16 \cdot 9 = 16a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 16 \cdot 9 \quad \Leftrightarrow \quad a = 12 \ .$$

Altså er

$$BD = BC - DC = a - 2 = 12 - 2 = 10 \ .$$

Alternativ løsning:



Vi sætter $v = \angle CBE$. I ΔBCE er så $\angle BCE = 90° - v$. Derefter finder vi i ΔACD, at $\angle CAD = v$.

Men så er ΔBCE og ΔACD ensvinklede, så deres sider er proportionale:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{8}{a} = \frac{2}{3} \ .$$

Vi får kun brug for de sidste to brøker, og ved at gange over kors, får vi

$$8 \cdot 3 = 2 \cdot a \quad \Leftrightarrow \quad a = 12 \ .$$

Altså er BD = 10.