Svar på opgave 2016-161
Januar 2016

Opgaven:

Summen af 18 konsekutive naturlige tal (dvs. naturlige tal, der følger lige efter hinanden i talrækken) er et kvadrattal.
Find den mindste sum med denne egenskab.

Løsning:

Vi kan betegne de 18 konsekutive tal sådan:

$$n-8\ ,\ n-7\ ,\ n-6\ ,\ \ldots\ ,n-1\ ,\ n\ ,\ n+1\ ,\ n+2\ ,\ \ldots\ ,n+8\ ,\ n+9\ .$$

Summen s af disse er

$$s = n-8+n-7+\cdots+n-1+n+n+1+\cdots+n+9 = 18n+9 = 9(2n+1)\ .$$

Her er 9 et kvadrattal, så $2n+1$ må også være et kvadrattal. Desuden skal $n \geq 8$, fordi det første tal $n-8$ i rækken skal være ikke-negativt.

Nu er $2n+1$ et ulige tal, så vi skal søge blandt de ulige kvadrattal. Den første mulighed er $2n+1=9$, så $n=4$. Denne værdi kan ikke bruges, da som nævnt $n \geq 8$. Den næste mulighed er $2n+1=25$, hvilket giver $n=12$.

Summen bliver så

$$s = 9(24+1) = 9\cdot 25 = 15^2\ ,$$

og de 18 tal er

$$4\ ,5\ ,6\ ,\ldots\ ,20\ ,21\ .$$

Alternativ løsning. Vi kunne også have valgt at betegne tallene sådan:

$$n\ ,n+1\ ,n+2\ ,\ldots\ ,n+16\ ,n+17\ .$$

Summen af disse er

$$18n+1+2+3+\cdots+17 = 18n+153 = 9(2n+17)\ .$$

På samme måde som før slutter vi, at $2n+17$ er et ulige kvadrattal, som er større end 17.
Vi har 25 som mindste mulighed, dvs. $2n+17=25$, så $n=4$.
Dette giver (selvfølgelig) samme løsning som før.

Bemærkning. Vi kan finde flere løsninger til problemet med de 18 konsekutive tal, hvis sum er et kvadrattal. Vi kan i den første løsning bruge det næste ulige kvadrattal, som er 49, og får, at $2n + 1 = 49$, altså $n = 24$. Vi får så talrækken

$$16\ ,\ 17\ ,\ 18\ , \ldots ,\ 33\ ,$$

hvis sum er

$$9(2n + 1) = 9 \cdot 49 = (3 \cdot 7)^2 = 21^2\ .$$