Svar på opgave 2016-163
Marts 2016

Opgaven:

Tallet n er et helt positivt tal, så både n og $n + 99$ er kvadrattal.
Find samtlige tal n med denne egenskab.

Løsning:

NB: nedenfor kaldes n for x.

Da både x og $x + 99$ er kvadrattal, kan vi skrive, at

$$x = p^2 \quad \text{og} \quad x + 99 = q^2 \ ,$$

hvor p og q er hele positive tal. Ved subtraktion får vi

$$x + 99 - x = q^2 - p^2 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 - p^2 = 99 \quad \Leftrightarrow \quad (q + p)(q - p) = 99 \ .$$

Nu kan 99 skrives som produkt af to tal på følgende måder:

$$99 = 1 \cdot 99 = 3 \cdot 33 = 9 \cdot 11 \ .$$

Derfor har vi følgende tre muligheder:

I. $q + p = 99$ og $q - p = 1$.

Addition af disse to ligninger giver $2q = 100$, så $q = 50$. Da $q + p = 99$, er $p = 49$.
Dette giver

$$x = p^2 = 49^2 = \mathbf{2401} \ .$$

Så er $x + 99 = q^2 = 2500$, og forskellen mellem 2500 og 2401 er netop 99.

II. $q + p = 33$ og $q - p = 3$.

Addition giver $2q = 36$, så $q = 18$. Da $q + p = 33$, er $p = 15$. Vi får, at

$$x = p^2 = 15^2 = \mathbf{225} \ .$$

Så er $x + 99 = q^2 = 324$, og forskellen mellem 324 og 225 er netop 99.

III. $q + p = 11$ og $q - p = 9$.

Addition giver $2q = 20$, så $q = 10$. Da $q + p = 11$, er $p = 1$. Vi får, at

$$x = p^2 = 1^2 = \mathbf{1}\ .$$

Så er $x + 99 = q^2 = 100$, og forskellen mellem 100 og 1 er netop 99.

I alt har vi fundet, at der kun findes tre muligheder for, at to kvadrattal kan have en forskel på 99, nemlig

$$50^2 - 49^2 = 99 \quad , \quad 18^2 - 15^2 = 99 \quad , \quad 10^2 - 1^2 = 99\ .$$

Den sidste havde vi muligvis gættet på forhånd.