

Svar på opgave 2016-166

Juni 2016

Opgaven:

Reducer udtrykket

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

Løsning:

Vi skal reducere udtrykket

$$s = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

Vi omskriver sådan:

$$\begin{aligned} s &= \frac{-a^3}{(a-b)(c-a)} - \frac{b^3}{(a-b)(b-c)} - \frac{c^3}{(c-a)(b-c)} && \text{Faktorer i nævneren skifter fortegn} \\ &= \frac{-a^3(b-c) - b^3(c-a) - c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} && \text{Leddene sættes på fælles brøkstreg} \\ &= \frac{a^3(c-b) - b^3c + b^3a - c^3a + c^3b}{(a-b)(b-c)(c-a)} && \text{To sidste led i tælleren omskrives} \\ &= \frac{a^3(c-b) + a(b^3 - c^3) + bc^3 - cb^3}{(a-b)(b-c)(c-a)} && \text{Fælles faktor } a \text{ i 3. og 4. led i tælleren} \end{aligned}$$

Nu gælder ved multiplikation af parenteser, at

$$b^3 - c^3 = (b-c)(b^2 + bc + c^2),$$

så vi får

$$\begin{aligned} s &= \frac{a^3(c-b) + a(b-c)(b^2 + bc + c^2) + bc(c^2 - b^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\ &= \frac{-a^3(b-c) + a(b-c)(b^2 + bc + c^2) - bc(b-c)(b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} && \text{Sidste led i tælleren omskrives} \\ &= \frac{-a^3 + a(b^2 + bc + c^2) - bc(b+c)}{(a-b)(c-a)} && \text{Brøken forkortes med } b-c \\ &= -\frac{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)}{(a-b)(c-a)} && \text{Der skiftes fortegn i tælleren, minus foran brøken} \end{aligned}$$

$$= - \frac{a^3 - ab^2 - abc - ac^2 + b^2c + bc^2}{(a-b)(c-a)}$$

Parenteserne i tælleren ganges ud

$$= - \frac{b^2c - b^2a + bc^2 - abc + a^3 - ac^2}{(a-b)(c-a)}$$

Rækkefølgen af leddene i tælleren ombyttes

$$= - \frac{b^2(c-a) + bc(c-a) + a(a^2 - c^2)}{(a-b)(c-a)}$$

Fælles faktorer sættes uden for parentes

$$= - \frac{b^2(c-a) + bc(c-a) - a(c-a)(c+a)}{(a-b)(c-a)}$$

Sidste led i tælleren omskrives

$$= - \frac{(c-a)(b^2 + bc - ac - a^2)}{(a-b)(c-a)}$$

Størrelsen $c - a$ sættes uden for parentes

$$= - \frac{b^2 + bc - ac - a^2}{a-b}$$

Forkort med $c - a$

$$= \frac{b^2 - a^2 + c(b-a)}{b-a}$$

Fælles faktor uden for parentes,
minus foran brøken ind i nævneren

$$= \frac{(b+a)(b-a) + c(b-a)}{b-a}$$

Tælleren omskrives

$$= \frac{(b-a)(a+b+c)}{b-a}$$

Størrelsen $b - a$ sættes uden for parentes

$$= a + b + c$$

Brøken forkortes med $b - a$