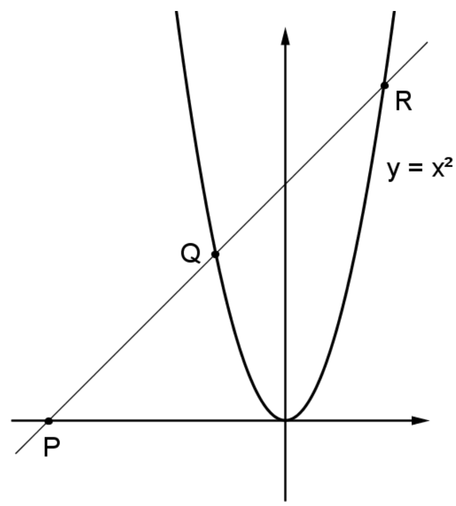
Svar på opgave 2016-168 Oktober 2016

Opgaven:

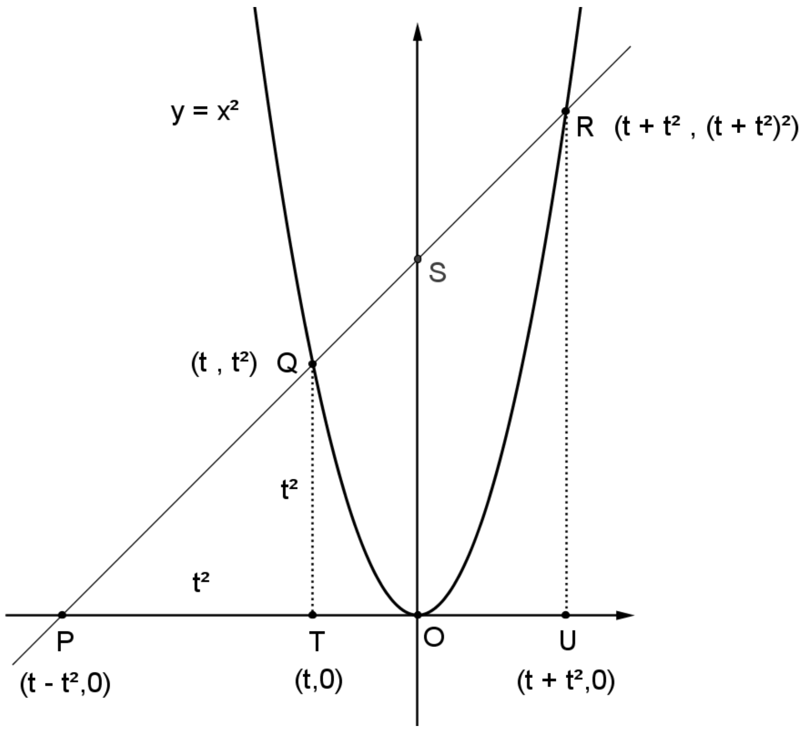
En linje med hældning 1 skærer den negative x-akse i punktet P og parablen med ligningen $y = x^2$
i punkterne Q og R, således at $PQ = QR$.
Bestem linjens skæringspunkt med y-aksen.



Løsning:

Vi lader projektionerne af Q og R på x-aksen være T og U. Desuden sætter vi x-koordinaten til T til t. Så har Q koordinaterne (t,t^2) og længden af linjestykket TQ er t^2. Da linjen har hældningen 1 har også PT længden t^2, så koordinaterne til P er $(t - t^2,0)$.

Da $PQ = QR$ er også $PT = TU$, så TU har længden t^2. Altså får U koordinaterne $(t + t^2,0)$. Da R ligger på parablen har R koordinaterne $(t + t^2 , (t + t^2)^2)$.



Længden af RU er $(1 + t^2)^2$ og længden af PU er det dobbelte af længden af PT, så

$$PU = RU \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot PT = RU \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 = (t + t^2)^2 \ .$$

Kvadratroden på begge sider og forkortning med t giver

$$\pm\, t\sqrt{2} = t + t^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pm\sqrt{2} = 1 + t \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\sqrt{2} - 1\,.$$

Da T ligger på x-aksens negative del, er t er negativ, så $t = -\sqrt{2} - 1$.

Lad linjen skære y-aksen i S. Da linjen har hældningen 1 er $OP = OS$. Nu er x-koordinaten til P negativ, mens y-koordinaten til S er positiv. Altså har S koordinaterne

$$S\ \ (0\ ,\ -\ (t\ -\ t^2)) = (0\ ,\ t^2 - t).$$

Vi får, at

$$t^2 - t = \left(-\sqrt{2} - 1\right)^2 - \left(-\sqrt{2} - 1\right) = 2 + 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 4 + 3\sqrt{2}\ .$$

Linjens skæringspunkt med y-aksen har altså koordinaterne

$$\left(0, 4 + 3\sqrt{2}\right).$$

Alternativ løsning.

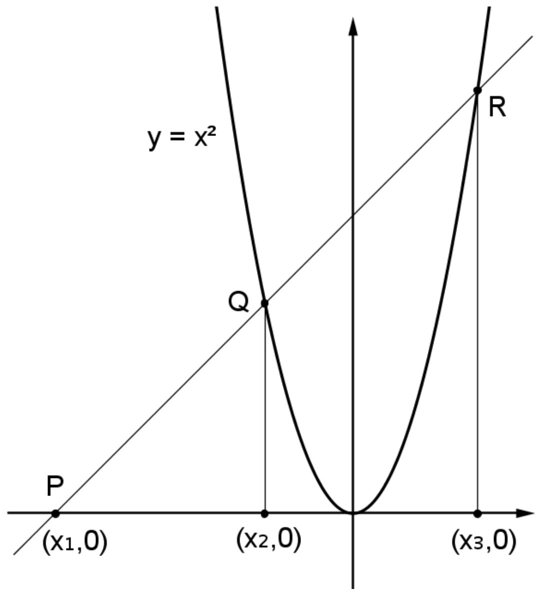
Lad linjen PR skære y-aksen i b, hvor $b > 0$. Da hældningen er 1, skærer linjen x-aksens negative del i punktet $(-b,0)$. Ligningen for PR er $y = x + b$ og vi kan bestemme x-koordinaterne til skæringspunkterne Q og R som løsninger til ligningen

$$x^2 = x + b \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4b}}{2}$$

Vi betegner *x*-koordinaterne til *P*, *Q* og *R* med x_1, x_2 og x_3,så vi har

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4b}}{2} \quad \text{og} \quad x_3 = \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2} \ .$$

Vi har, at $x_1 = -b$, fordi linjens hældning er 1.



Da x_2 er middeltallet mellem x_1 og x_3 er

$$2x_2 = x_1 + x_3 \ ,$$

hvilket giver

$$1-\sqrt{1+4b} = -b + \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2-2\sqrt{1+4b} = -2b+1+\sqrt{1+4b}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+2b = 3\sqrt{1+4b} \quad \Leftrightarrow \quad (1+2b)^2 = 9(1+4b) \quad \Leftrightarrow \quad 1+4b^2+4b = 9+36b$$

$$\Leftrightarrow \quad 4b^2-32b-8=0 \quad \Leftrightarrow \quad b^2-8b-2=0$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \frac{8\pm\sqrt{64+8}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{72}}{2} = \frac{8\pm 6\sqrt{2}}{2} = 4\pm 3\sqrt{2}\ .$$

Da b er positiv, er $b = 4+3\sqrt{2}$ så linjen skærer *y*-aksen i punktet $\left(0, 4+3\sqrt{2}\right)$.