Svar på opgave 2016-170 December 2016

Opgaven:

Vis uden brug af grafregner eller matematikprogram, at

$$\sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}}=\sqrt[7]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[7]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}}\ .$$

Løsning:

1. metode.

Vi ønsker at skrive tallet $\frac{11+5\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618034...$ som en femtepotens af et tal af typen $a+b\sqrt{5}$, hvor a og b er positive rationale tal (brøker), dvs. vi vil finde a og b så

$$\left(a+b\sqrt{5}\right)^5=\frac{11+5\sqrt{5}}{2}=\frac{11}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{5}\ . \qquad (1)$$

I så tilfælde er nemlig

$$\sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}=\sqrt[5]{(a+b\sqrt{5})^5}=a+b\sqrt{5}\ .$$

Ved udregning får vi, at der gælder formlen

$$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5\ , \qquad (2)$$

og derfor er

$$\left(a+b\sqrt{5}\right)^5=a^5+5a^4b\sqrt{5}+10a^3\left(b\sqrt{5}\right)^2+10a^2\left(b\sqrt{5}\right)^3+5a\left(b\sqrt{5}\right)^4+\left(b\sqrt{5}\right)^5$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(a+b\sqrt{5}\right)^5=a^5+5a^4b\sqrt{5}+10a^3b^2\cdot 5+10a^2b^3\cdot 5\sqrt{5}+5ab^4\cdot 25+b^5\cdot 25\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(a+b\sqrt{5}\right)^5=a^5+50a^3b^2+125ab^4+\sqrt{5}\cdot\left(5a^4b+50a^2b^3+25b^5\right).$$

Vi ønsker at bestemme a og b så højre side stemmer overens med højre side i (1), dvs.

$$a^5+50a^3b^2+125ab^4=\tfrac{11}{2}$$
$$5a^4b+50a^2b^3+25b^5=\tfrac{5}{2}\ .$$

Tallene a og b er positive og må være mindre end 1. I den første ligning er summen af koefficienterne 1+50+125 = 176, så hvert af de 176 led har en gennemsnitlig størrelse på

$$\tfrac{11}{2}:176=\tfrac{11}{2\cdot 176}=\tfrac{11}{16\cdot 11\cdot 2}=\tfrac{1}{32}\ .$$

Hvis vi vælger $a = b = \frac{1}{2}$ er

$$a^5 = \tfrac{1}{32} \ , \ a^3b^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{32} \ , \ ab^4 = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 = \tfrac{1}{32} \ ,$$

og venstre side er

$$\tfrac{1}{32} + 50 \cdot \tfrac{1}{32} + 125 \cdot \tfrac{1}{32} = \tfrac{176}{32} = \tfrac{11}{2} \ .$$

Dette er netop det ønskede. Vi prøver, om $a = b = \frac{1}{2}$ også virker i den anden af ligningerne:

$$5 \cdot \tfrac{1}{32} + 50 \cdot \tfrac{1}{32} + 25 \cdot \tfrac{1}{32} = \tfrac{80}{32} = \tfrac{5}{2} \ .$$

Altså har vi fundet, at

$$\sqrt[5]{\frac{11}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \ .$$

På samme måde er

$$\sqrt[5]{\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \ .$$

Derefter ser vi på tallet

$$\sqrt[7]{\frac{29}{2} + \frac{13}{2}\sqrt{5}} \approx 1{,}618034 .$$

Dette tal ser ud til at være det samme som femteroden oven for, så vi må vise, at

$$\sqrt[7]{\frac{29}{2} + \frac{13}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{eller at} \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^7 = \frac{29}{2} + \frac{13}{2}\sqrt{5} \ .$$

Formlen for en toleddet størrelses 7. potens er

$$(x + y)^7 = x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7 \ , \qquad (3)$$

som kan fås ved at gange formlen (2) med $(x + y)^2$ på venstre side og med $x^2 + 2xy + y^2$ på højre side.

Hvis vi i formlen (3) indsætter $x = \frac{1}{2}$ og $y = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, får vi ved en hel del algebraisk flid, at ligningen (3) passer.

På samme måde er

$$\sqrt[7]{\frac{29}{2} - \frac{13}{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \ .$$

Vi får derefter, at

$$\sqrt[5]{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[5]{\frac{11 - 5\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1$$

og

$$\sqrt[7]{\frac{29 + 13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[7]{\frac{29 - 13\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1 \ ,$$

og dermed er det ønskede vist.

2. metode.
Vi gætter på, at

$$\left(a+b\sqrt{5}\right)^5=\frac{11+5\sqrt{5}}{2}=\frac{11}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{5}\ ,$$

for passende valgte værdier for a og b. Den simpleste mulighed er a = 1 og b = 1. Vi finder, at

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^2=6+2\sqrt{5}\quad\text{og}\quad\left(\sqrt{5}+1\right)^3=16+8\sqrt{5}\ ,$$

og dermed får vi

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^5=\left(6+2\sqrt{5}\right)\cdot\left(16+8\sqrt{5}\right)=2\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot 8\cdot\left(2+\sqrt{5}\right)=16\cdot\left(11+5\sqrt{5}\right).$$

Altså er

$$11+5\sqrt{5}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^5}{16}\ .$$

Så har vi, at

$$\sqrt{5}+1=\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{11+5\sqrt{5}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}}=\sqrt[5]{11+5\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{2}}=\frac{\sqrt[5]{11+5\sqrt{5}}}{\sqrt[5]{2}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}\ .$$

Tilsvarende er

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}}$$

Vi får så

$$\sqrt[5]{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[5]{\frac{11-5\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1\ .$$

Vi prøver på samme måde for rødderne med rodeksponent 7 og benytter regningerne oven for:

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^7=\left(\sqrt{5}+1\right)^5\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)^2=16\cdot\left(11+5\sqrt{5}\right)\cdot\left(6+2\sqrt{5}\right)$$
$$=32\cdot\left(11+5\sqrt{5}\right)\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)=32\cdot\left(58+26\sqrt{5}\right)=64\cdot\left(29+13\sqrt{5}\right).$$

Heraf fås

$$29+13\sqrt{5}=\frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^7}{64}\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt[7]{29+13\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[7]{64}}$$
$$\Leftrightarrow\quad\frac{\sqrt[7]{29+13\sqrt{5}}}{\sqrt[7]{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt[7]{64}\cdot\sqrt[7]{2}}\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt[7]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\ .$$

Tilsvarende er

$$\sqrt[7]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ .$$

Så er

$$\sqrt[7]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}}+\sqrt[7]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1\ .$$

Venstre og højre side i den oprindelige ligning er begge lig med 1, så ligningen er opfyldt.