Svar på opgave 2017-171 Januar 2017

Opgaven:

Hvis n er et helt positivt tal, udregner vi summen af de 81 tal, der følger efter $n + 19$:

$$k = (n + 20) + (n + 21) + (n + 22) + \cdots + (n + 99) + (n + 100)$$

Find den mindste værdi af n, så dette tal k er et kvadrattal.

Løsning:

Vi får ved udregning, at

$$\begin{aligned} k &= (n+20) + (n+21) + \cdots + (n+99) + (n+100) \\ &= 81n + 20 + 21 + \cdots + 99 + 100\ . \end{aligned}$$

Vi sætter

$$s = 20 + 21 + \cdots + 99 + 100\ ,$$

så vi også har

$$s = 100 + 99 + \cdots + 21 + 20\ .$$

Ved at lægge de sidste to ligninger sammen får vi

$$2s = 120 + 120 + \cdots + 120 + 120 = 81 \cdot 120 \quad \text{så} \quad s = 81 \cdot 60\ .$$

Altså er

$$k = 81n + 81 \cdot 60 = 81(n + 60) = 9^2 \cdot (n + 60)\ .$$

Hvis k skal være et kvadrattal, må også $n + 60$ være et kvadrattal. Det er oplagt, at $n = 4$ er den mindste værdi for n, der opfylder dette. Så er

$$k = 9^2 \cdot 64 = 9^2 \cdot 8^2 = 72^2\ .$$

Summen er

$$k = 24 + 25 + \cdots + 103 + 104 = 72^2\ .$$

Som bonus ser vi, at den næstmindste værdi af n, der opfylder betingelsen, er $n = 21$. Så får vi nemlig

$$k = 9^2 \cdot 81 = 9^2 \cdot 9^2 = 81^2\ ,$$

og summen er

$$k = 41 + 42 + \cdots + 120 + 121 = 81^2\ .$$