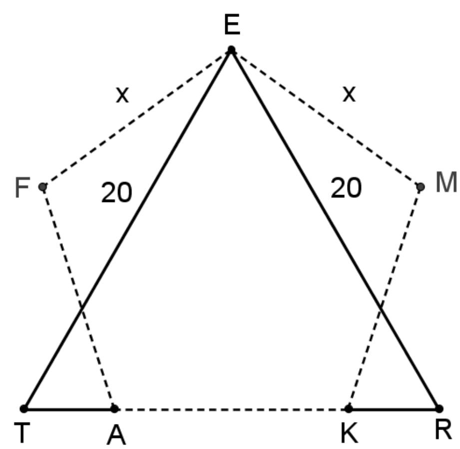
Svar på opgave 2017-172 Februar 2017

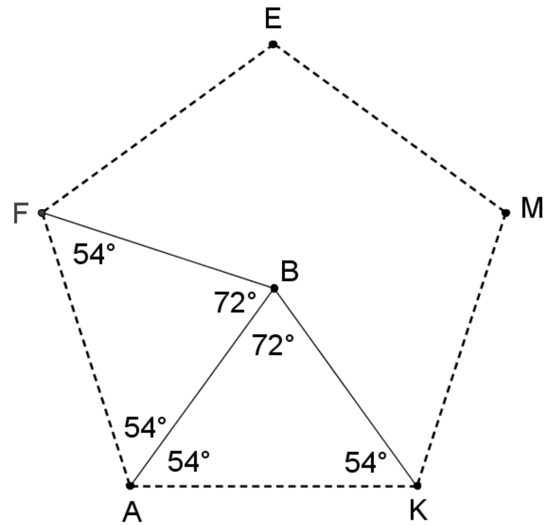
Opgaven:

ΔTRE er ligesidet med sidelængden 20 og femkanten *FEMKA* er regulær (dvs. alle vinkler er lige store og alle sider er lige lange) med sidelængde x.
Desuden ligger *AK* midt på siden *TR*, dvs. $TA = KR$.
Bestem x.



Løsning:

Vi gør først et par bemærkninger. I den regulære femkant er vinklen mellem to sammenstødende sider i en vinkelspids 108°. Dette følger af, at femkanten kan deles i fem *centraltrekanter*, som alle er ligebenede og har centrum i femkantens centrum. Topvinklerne i disse trekanter er $\frac{1}{5} \cdot 360° = 72°$. På grund af vinkelsummen på 180° i en trekant er så hver af vinklerne ved grundlinjen 54° som vist. Dette giver en vinkel på de nævnte 108° mellem to femkantsider.

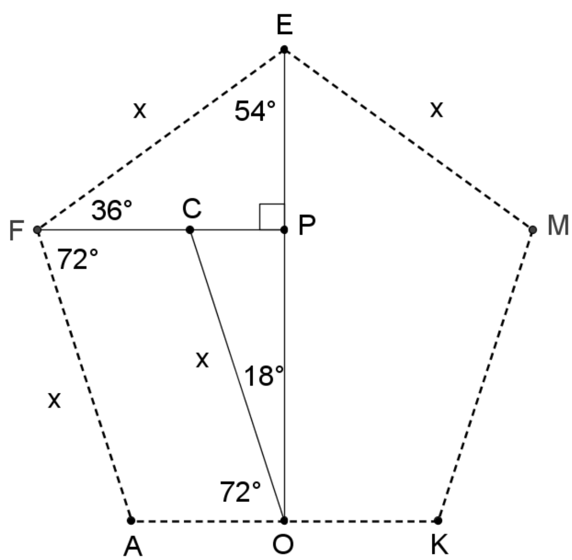


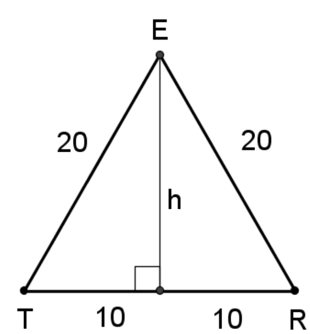
I den ligesidede trekant med sidelængde 20 kaldes højden h. Pythagoras sætning giver

$$h^2 + 10^2 = 20^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = 400 - 100 = 300 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}\ .$$

Projektionen af E på femkantsiden AK er O. Projektionen af F på EO er P. En linje gennem O parallel med AF skærer FP i C. I ΔFPE er (se figuren)

$$\angle PFE = 36° \quad \text{og} \quad \angle FEP = 54°.$$





Da trekanten er retvinklet er

$$EP = x \cdot \cos 54°\ .$$

Desuden er

$$\angle PFA = 72°\ ,\ \angle AOC = 72°\ ,\ \angle POC = 18° \ \text{og}\ OC = AF = x.$$

I den retvinklede ΔCOP er så

$$OP = x \cdot \cos 18° \ .$$

Altså er

$$EO = EP + OP = x \cdot (\cos 54° + \cos 18°) \ .$$

Nu er EO netop højden I den ligesidede trekant med sidelængde 20, så

$$10\sqrt{3} = x \cdot (\cos 54° + \cos 18°) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{10\sqrt{3}}{\cos 54° + \cos 18°} \approx 11{,}255 \ .$$

Bemærkning. Man kan vise, at de gælder de eksakte værdier

$$\cos 18° = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \quad \text{og} \quad \cos 54° = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} \ ,$$

og disse værdier fører til det eksakte udtryk for x:

$$x = \frac{20\sqrt{6}}{\sqrt{5-\sqrt{5}} + \sqrt{5+\sqrt{5}}} \ .$$