

# Svar på opgave 2017-174

## April 2017

### Opgaven:

Løs ligningen

$$\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3.$$

Der kræves en eksakt løsning med mellemregninger.

Løsninger frembragt ved hjælp af et matematikprogram accepteres ikke.

### Løsning:

For nemheds skyld sætter vi

$$a = \sqrt[3]{x+9} \quad \text{og} \quad b = \sqrt[3]{x-9}.$$

så

$$a^3 = x+9 \quad \text{og} \quad b^3 = x-9.$$

Den givne ligning er altså

$$a - b = 3.$$

Vi opløfter til tredje potens på begge sider af lighedstegnet. Venstre side bliver så

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b).$$

Vi benytter, at  $a - b = 3$ , så ligningen får udseendet

$$x + 9 - (x - 9) - 3\sqrt[3]{x+9} \cdot \sqrt[3]{x-9} \cdot (a - b) = 3^3$$

$$\Leftrightarrow 18 - 3\sqrt[3]{(x+9)(x-9)} \cdot 3 = 27 \Leftrightarrow 9\sqrt[3]{x^2 - 81} = -9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2 - 81} = -1 \Leftrightarrow x^2 - 81 = -1 \Leftrightarrow x^2 = 80 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{80} = \pm 4\sqrt{5}.$$

Alternativt kan man skrive ligningen som

$$a = 3 + b,$$

og hvis man opløfter til tredje potens på begge sider af lighedstegnet fås

$$a^3 = 27 + 27b + 9b^2 + b^3 \Leftrightarrow x + 9 = 27 + 27b + 9b^2 + x - 9$$

$$\Leftrightarrow 9b^2 + 27b + 27 = 18 \Leftrightarrow b^2 + 3b + 1 = 0.$$

Dette er en andengradsligning, og vi får

$$b = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5}),$$

eller

$$\sqrt[3]{x-9} = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{5}) \quad \text{eller} \quad \sqrt[3]{x-9} = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{5}).$$

Ved at opløfte til tredje potens på begge sider af lighedstegnet i disse to ligninger, får igen  $x = \pm 4\sqrt{5}$ .

## Hvordan tegnes og løses opgaven med Maple?

**NB: Opgaven skal løses UDEN brug af Maple!**

Skal løse ligningen  $\sqrt[3]{x+9} - \sqrt[3]{x-9} = 3$

**Dette kan ikke umiddelbart indtastes i Maple når  $x < 9$ .**

**Kubikroden af et negativt tal bliver beregnet indenfor de komplekse tal!**

**$\sqrt[3]{-8}$  giver -2 indenfor de reelle tal.**

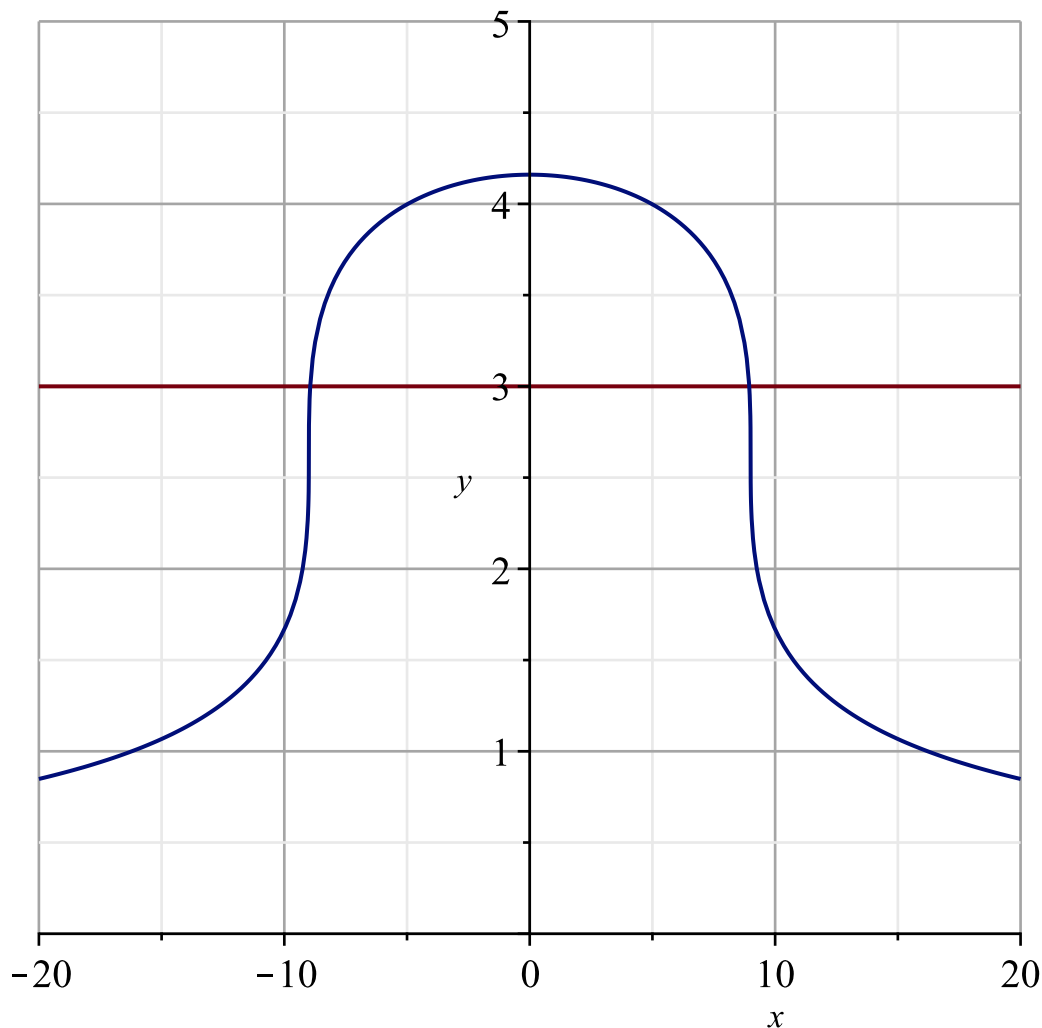
**Maple svarer med den komplekse enhedsrod:  $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3} \stackrel{\text{simplify}}{=} 1 + i\sqrt{3}$**

**Man skal anvende funktionen  $\text{surd}(x, 3)$  for at få beregnet 3. rod af x indenfor de reelle tal!**

$\text{surd}(-8, 3) = -2$

$f(x) := \text{surd}(x+9, 3) - \text{surd}(x-9, 3) :$

$\text{plot}(\{f(x), 3\}, x=-20..20, y=0..5, \text{gridlines})$



$\text{solve}(f(x) = 3, x) = 4\sqrt{5}, -4\sqrt{5}$

$\text{evalf}(\%) = 8.944271908, -8.944271908$

**Svaret er så  $\pm 4 \cdot \sqrt{5} \approx \pm 8.94$**