Svar på opgave 2017-176
Juni 2017

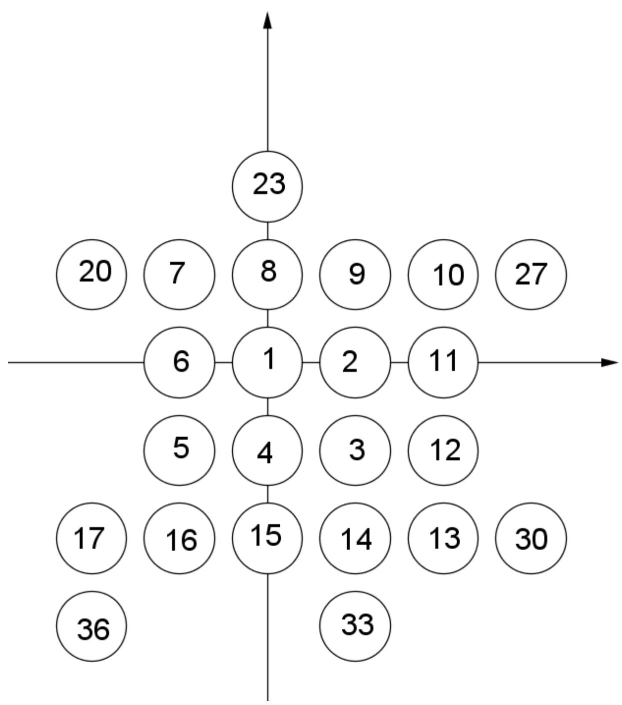
Opgaven:

Tallene 1, 2, 3, . . . skrives i et spiralformet mønster i koordinatsystemet som vist på figuren.
Tallet 1 anbringes i (0,0) og tallet 27 kommer på denne måde til at stå i punktet (3,1).

Bestem koordinaterne til det punkt, hvor tallet 2017 kommer til at stå.

Der kræves en omhyggelig begrundelse for svaret.

Husk, at samtlige mellemregninger skal anføres.



Løsning:

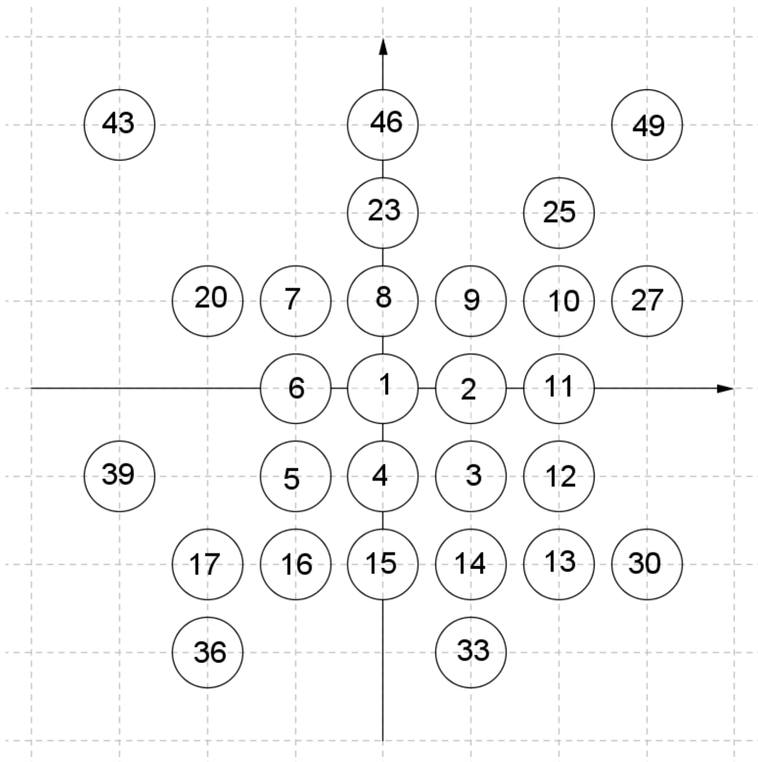
Ved at tegne flere tal ind på skemaet ser vi, at

tallet $9 = 3^2$ ligger i punktet (1,1) og $3 = 2 \cdot 1 + 1$

tallet $25 = 5^2$ ligger i punktet (2,2) og $5 = 2 \cdot 2 + 1$
tallet $49 = 7^2$ ligger i punktet (3,3) og $7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Hvis man fortsætter på denne måde kan man altså sige, at

tallet $(2n + 1)^2$ ligger i punktet (n,n) og $2n + 1 = 2 \cdot n + 1$.



Vi får derved fastlagt beliggenheden af de ulige kvadrattal. Det ulige kvadrattal, der er tættest på 2017, er $45^2 = 2025$. Nu er $45 = 2 \cdot 22 + 1$, så tallet 2025 ligger i punktet med koordinaterne (22,22). Tallet 2017 må derfor 8 pladser til venstre for 2025, så 2017 ligger i punktet med koordinaterne (14,22).

Bemærkning. Vi ser, at tallene på y-aksens ikke-negative del er

$$1 , 8 , 23 , 46 , 77 , \ldots \qquad (1)$$

svarende til y-værdierne

$$0 , 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots$$

Hvis man gætter på, at tallene i (1) er funktionsværdier for et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c ,$$

får vi

$$f(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = 1$$

$$f(1) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + 1 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a + b = 7$$

$$f(2) = 23 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 2b + 1 = 23 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 2b = 22 .$$

De to sidste ligninger giver, at $a = 4$ og $b = 3$. Altså er

$$f(x) = 4x^2 + 3x + 1 \ .$$

Dette passer med y-værdien 3 på figuren, fordi

$$f(3) = 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 = 36 + 9 + 1 = 46 \ .$$

Vi ønsker en værdi tæt ved 2017, dvs. $4x^2$ skal ca. være 2017. Altså skal x^2 være ca. 500 eller x ca. 22. Vi får funktionsværdien

$$f(22) = 4 \cdot 22^2 + 3 \cdot 22 + 1 = 2003 \ .$$

Tallet 2003 ligger derfor i punktet (0,22). Tallet 2017 må altså ligge 14 pladser til højre, dvs. i punktet med koordinaterne (14,22).

Hvis vi ser på talfølgen (1) igen og noterer forskellene mellem leddene og forskellene mellem forskellene, får vi følgende skema:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 8 & & 23 & & 46 & & 77\ldots \\ & 7 & & 15 & & 23 & & 31\ldots & \\ & & 8 & & 8 & & 8\ \ldots & & \end{array}$$

Forskellenes forskelle er altså konstant, og man kan i lidt videregående matematik vise, at hvis tredje række i dette såkaldte *differensskema* er konstant, fremstilles den øverste talfølge af værdierne i et andengradspolynomium.