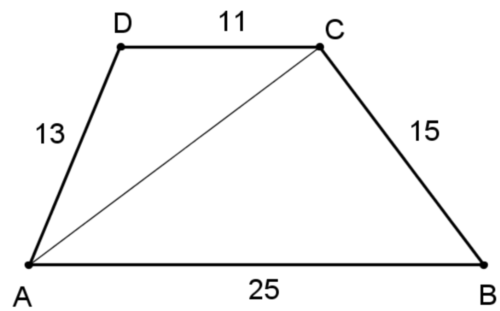
Svar på opgave 2017-177 September 2017

Opgaven:

I trapezet $ABCD$ er $AB \parallel CD$.
Sidelængderne er $AB = 25$, $CD = 11$, $BC = 15$ og $AD = 13$.
Vis, at $\angle ACB$ er ret.



Løsning:

Projektionerne af D og C på AB er H og K. Vi sætter $AH = x$. Så er $HK = 11$ og

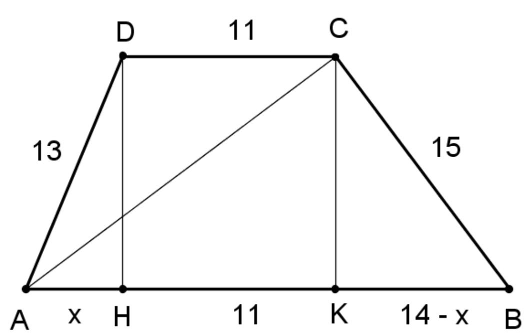
$$KB = AB - AH - HK = 25 - x - 11 = 14 - x\ .$$

Pythagoras i ΔADH giver

$$DH^2 = 13^2 - x^2 = 169 - x^2\ .$$

og pythagoras i ΔBCK giver

$$CK^2 = 15^2 - (14 - x)^2 = 225 - (196 + x^2 - 28x) = 29 - x^2 + 28x\ . \qquad (1)$$



Da $DH = CK$ er $DH^2 = CK^2$, så at

$$169 - x^2 = 29 - x^2 + 28x \quad \Leftrightarrow \quad 28x = 140 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5\ .$$

Dernæst er

$$AK = AH + HK = x + 11 = 16\ .$$

Af (1) får vi

$$CK^2 = 15^2 - (14 - 5)^2 = 225 - 9^2 = 225 - 81 = 144 \quad \Leftrightarrow \quad CK = 12.$$

I ΔACK giver Pythagoras, at

$$AC^2 = AK^2 + CK^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400 \quad \Leftrightarrow \quad AC = 20\ .$$

I ΔABC får vi så

$$AC^2 + CB^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 = 25^2 = AB^2\ ,$$

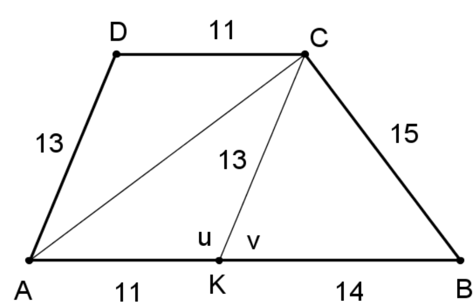
så den omvendte Pythagoras i ΔABC giver, at $\angle ACB$ er ret.

Alternativ løsning:

Som i mange andre tilfælde viser det sig også her, at der findes flere måder at løse en opgave på. Vi viser en sådan anden metode.

Gennem C trækkes en linje parallel med AD. Den skærer AB i K.
Så er □$AKCD$ et parallelogram, så $CK = 13$. Vi sætter $v = \angle CKB$ og $u = \angle AKC$.
Vi har, at $u + v = 180°$ og dermed er $\cos(u) = -\cos(v)$ - det kan ses på enhedscirklen.
I ΔBCK giver cosinusrelationen

$$\cos v = \frac{13^2 + 14^2 - 15^2}{2 \cdot 13 \cdot 14} = \frac{169 + 196 - 225}{2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{140}{2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{5}{13}\ .$$



Vi får, at $\cos(u) = -\cos(v) = -\frac{5}{13}$. Cosinusrelationen i ΔACK giver

$$AC^2 = AK^2 + KC^2 - 2 \cdot AK \cdot KC \cdot \cos(u) = 11^2 + 13^2 - 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$= 121 + 169 + 110 = 400\ ,$$

så $AC = 20$. Som før giver den omvendte Pythagoras i ΔABC, at $\angle ACB$ er ret.