Svar på opgave 2018-183
Marts 2018

Opgaven:

De reelle tal a, b og c opfylder, at

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

hvor $a, b, c \neq 0$ og $a + b + c \neq 0$.

Vis, at summen af to af tallene er 0.

Løsning:

1. metode

I ligningen

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

forlænger vi med fællesnævneren $abc(a + b + c)$:

$$\frac{abc(a+b+c)}{a}+\frac{abc(a+b+c)}{b}+\frac{abc(a+b+c)}{c}=\frac{abc(a+b+c)}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \quad bc(a+b+c)+ac(a+b+c)+ab(a+b+c)=abc\ .$$

På venstre side ganger vi parenteserne ud, idet vi beholder $a + b$ som én faktor:

$$bc(a+b)+bc^2+ac(a+b)+ac^2+ab(a+b)+abc=abc\ .$$

Vi sætter $a + b$ uden for parentes og trækker abc fra på begge sider:

$$(a+b)(bc+ac+ab)+bc^2+ac^2=0\ .$$

Sæt c^2 uden for parentes i de to sidste led på venstre side:

$$(a+b)(bc+ac+ab)+c^2(a+b)=0\ .$$

Sæt $a + b$ uden for parentes på venstre side:

$$(a+b)(bc+ac+ab+c^2)=0\ .$$

Den sidste parentes kan omskrives:

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0\ .$$

Da produktet af tre tal er 0, må mindst et af tallene være 0, så

$$a + b = 0 \text{ eller } b + c = 0 \text{ eller } c + a = 0 \,.$$

2. metode

I ligningen

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

sætter vi de to første led på venstre side på fælles brøkstreg og trækker tredje led over på højre side:

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c} \,.$$

Sæt leddene på højre side på fælles brøkstreg:

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{c-a-b-c}{c(a+b+c)} \,.$$

Reducér højre side:

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{-(a+b)}{c(a+b+c)} \,.$$

Denne formel er opfyldt, hvis $a + b = 0$. Hvis $a + b \neq 0$, kan vi dividere på begge sider med $a + b$:

$$\frac{1}{ab}=\frac{-1}{ac+bc+c^2} \,.$$

Ved at gange over kors fås

$$-ab = ac + bc + c^2 \quad \Leftrightarrow \quad ac + bc + ab + c^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b + c)(a + c) = 0 \,.$$

Da produktet af de to parenteser er 0, må en af dem være 0, dvs. $b + c = 0$ eller $a + c = 0$. Dermed er det ønskede bevist.