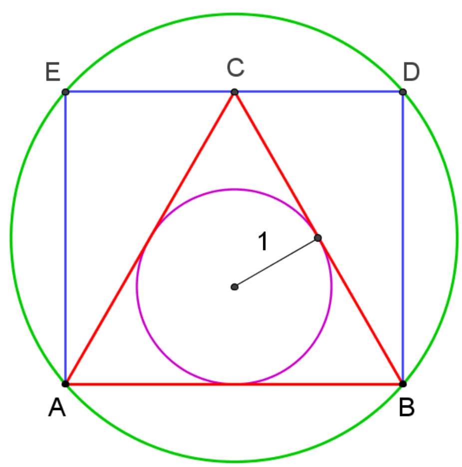
Svar på opgave 2018-185
Maj 2018

Opgaven:

ΔABC er ligesidet og radius i den indskrevne cirkel er 1. Med AB som grundlinje tegnes rektanglet $ABDE$ som vist, hvor DE går gennem C. Rektanglet har en omskreven cirkel. Find radius i denne cirkel.



Løsning:

Lad O være centrum for trekantens indskrevne cirkel og G cirklens røringspunkt på siden BC. Da vinklerne i ΔABC er 60°, er $\angle OCG = 30°$, og i ΔOCG er

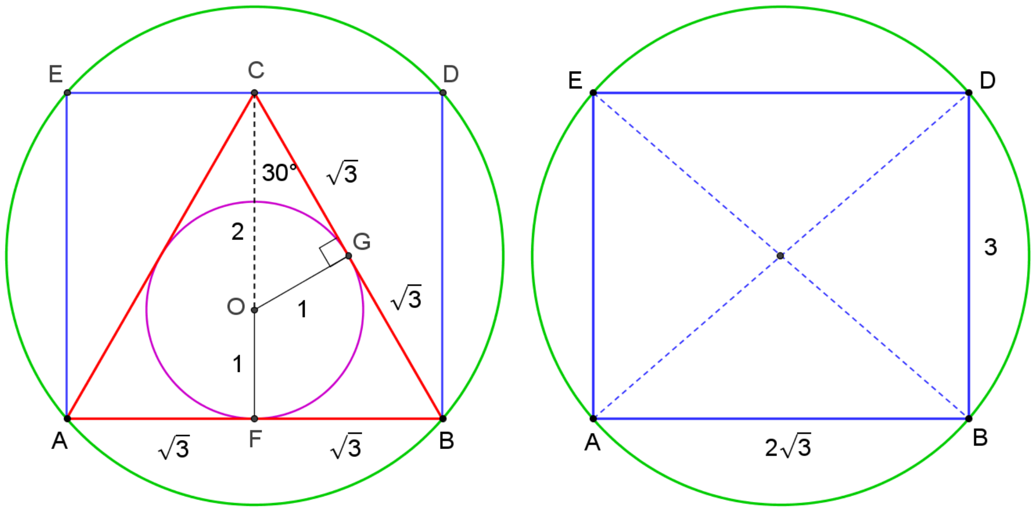
$$\sin 30° = \frac{OG}{OC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{OC} \quad \Leftrightarrow \quad OC = 2 \,.$$

Desuden er

$$OF = OG = 1 \quad \text{så} \quad CF = CO + OF = 3 \,.$$

Pythagoras i ΔOCG giver

$$CG^2 + OG^2 = OC^2 \quad \Leftrightarrow \quad CG^2 + 1 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad CG = \sqrt{3} \,.$$



Da G er midtpunkt af BC, er $BG = \sqrt{3}$, så sidelængden i den ligesidede ΔABC er $AB = 2\sqrt{3}$.

Vi har nu fundet sidelængderne i rektanglet $ABDE$, nemlig $AB = 2\sqrt{3}$ og $BD = CF = 3$. Den omskrevne cirkel for et rektangel har centrum i diagonalernes skæringspunkt og diameteren er længden af diagonalerne. Her er

$$BE^2 = BD^2 + DE^2 = 3^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 12 = 21 \ ,$$

og dermed er

$$BE = \sqrt{21} \ .$$

Radius i cirklen er altså $\frac{1}{2}\sqrt{21}$.