Svar på opgave 2018-186
Juni 2018

Opgaven:

Bestem alle hele tal *n*, så

$$\sqrt{n^2+6n-7}$$

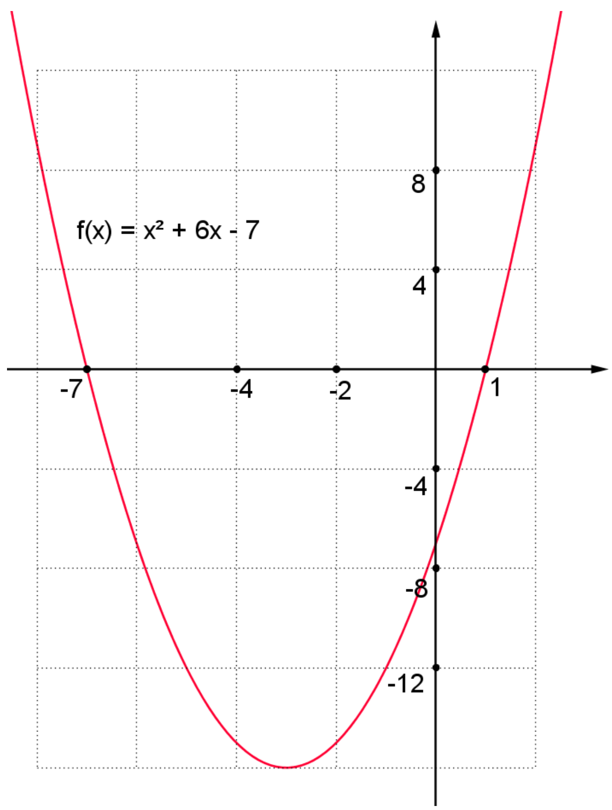
er et helt tal.

Løsning:

Vi må kræve, at radikanden (dvs. størrelsen under rodtegnet) er positiv eller 0, dvs. at

$$n^2 + 6n - 7 \geq 0 \ .$$

For at løse denne ulighed ser vi på funktionen $f(x) = x^2 + 6x - 7$.



Det grafiske billede er en parabel med grenene opad, hvis skæringspunkter med x-aksen vi finder:

$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+6x-7=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot(-7)}}{2}=\begin{cases}-7\\ 1\end{cases}.$$

Altså er $n^2 + 6n - 7 \geq 0$ hvis $n \geq 1$ eller $n \leq -7$.

Nu gælder, at

$$n^2 + 6n - 7 = (n + 3)^2 - 16 .$$

Vi søger et helt tal m, så

$$\sqrt{n^2+6n-7}=m . \tag{1}$$

Da kvadratrødder er positive eller 0, er m altså positiv eller 0.

Hvis $m = 0$, er $n^2 + 6n - 7 = 0$, så $n = -7$ eller $n = 1$. Dermed har vi fundet to løsninger til opgaven.

Hvis $m > 0$ kan vi omskrive (1) sådan:

$$n^2 + 6n - 7 = m^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + 6n - 7 - m^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n + 3)^2 - 16 - m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (n + 3)^2 - m^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad (n + 3 - m)(n + 3 + m) = 16 . \tag{2}$$

Vi har her til sidst benyttet formlen $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

I ligningen (2) er den første faktor mindre end den anden, fordi m er positiv.
Derfor har vi følgende fire muligheder for de to faktorer med produktet 16:

I. $n + 3 - m = 1$	**II.** $n + 3 - m = -16$	**III.** $n + 3 - m = 2$	**IV.** $n + 3 - m = -8$
$n + 3 + m = 16$	$n + 3 + m = -1$	$n + 3 + m = 8$	$n + 3 + m = -2$.

Vi ser på mulighederne efter tur.

I. Addition af ligningerne giver $2n + 6 = 17$, som ikke har nogen hel løsning.

II. Addition af ligningerne giver $2n + 6 = -17$, som ikke har nogen hel løsning.

III. Addition af ligningerne giver $2n + 6 = 10$ med løsninger $n = 2$ og $m = 3$.

IV. Addition af ligningerne giver $2n + 6 = -10$ med løsninger $n = -8$ og $m = 3$.

I alt har vi fundet at $\sqrt{n^2+6n-7}$ er et helt tal hvis n har en af værdierne -8, -7, 1 og 2.
Værdien af kvadratroden er da henholdsvis 3, 0, 0 og 3.