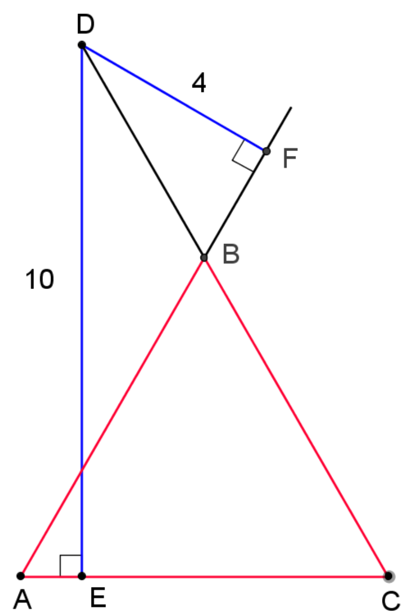
Svar på opgave 2018-188 Oktober 2018

Opgaven:

ΔABC er ligesidet. Siden CB forlænges ud over B til punktet D og projektionerne af D på AC og AB er E og F. Det oplyses, at $DE = 10$ og $DF = 4$.
Bestem arealet af ΔABC.

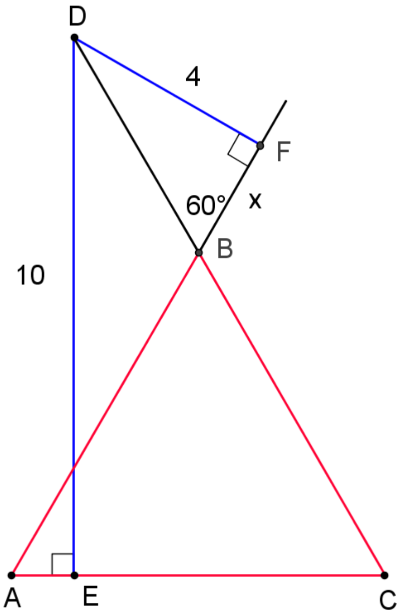


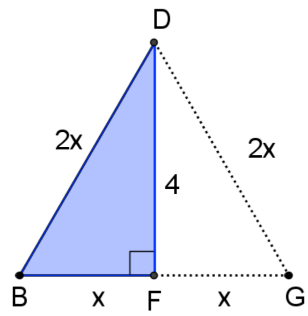
Løsning:

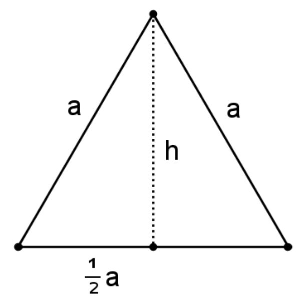
I ΔDFB er vinklerne $B = 60°$, $F = 90°$ og $D = 30°$. Den kan opfattes som det halve af en ligesidet ΔBDG som vist. Vi sætter $BF = x$ og da der i den ligesidede trekant gælder, at $BG = 2x = BD$ giver Pythagoras i ΔDFB:

$$4^2 + x^2 = (2x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 16 + x^2 = 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{16}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{\sqrt{3}} .$$

Desuden er $BD = 2x = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.







Nu er også ΔDEC en trekant med vinkelmål på 30°, 60° og 90°. Derfor er ΔDFB og ΔDEC ensvinklede og forholdet mellem sidelængderne i ΔDEC og ΔDFB er $\frac{10}{4}$. Altså er

$$CD = \frac{10}{4} \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{20}{\sqrt{3}} \ .$$

Så kan vi finde sidelængden i ΔABC, idet

$$BC = CD - BD = \frac{20}{\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \ .$$

Hvis en ligesidet trekant har sidelængde a og højde h ser vi på figuren til højre, at

$$h^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 + \tfrac{1}{4}a^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \tfrac{3}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \tfrac{\sqrt{3}}{2}a \ .$$

Arealet af trekanten er så

$$T = \tfrac{1}{2}h \cdot a = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a = \tfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 \ .$$

Altså har ΔABC arealet

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot BC^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot 144}{4 \cdot 3} = \frac{36\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3} \approx 20{,}785 \ .$$