Svar på opgave 2018-189 November 2018

Opgaven:

Vis, at der for alle tal *a*, *b* og *c* gælder

$$\frac{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}-\frac{3}{a+b+c}}=a+b+c \ ,$$

forudsat, at ingen af nævnerne er 0.

Løsning:

Vi foretager en række ensbetydende omskrivninger af den givne ligning:

$$\frac{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}-\frac{3}{a+b+c}}=a+b+c \ .$$

Vi ganger med nævneren på begge sider af lighedstegnet:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}-\frac{3}{a+b+c}\right) \ .$$

På højre side ganges $a + b + c$ ind i parentesen på hvert led:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}-\frac{3(a+b+c)}{a+b+c} \ .$$

Hver af de tre første brøker på højre side deles i to brøker, og den sidste brøk udregnes:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{a+b}{a+b}-3 \ .$$

Ens brøker på hver side af lighedstegnet slettes:

$$0=\frac{b+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+c}+\frac{a+b}{a+b}-3 \ .$$

Hver af brøkerne på højre side har værdien 1 og derfor er den sidste ligning sand. Altså er også den første ligning sand, hvilket skulle vises.