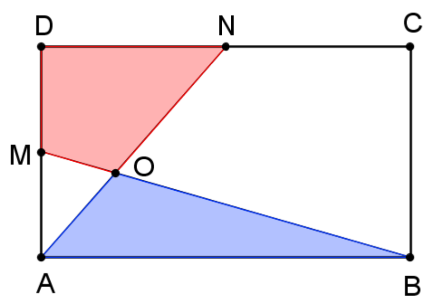
Svar på opgave 2019-191 Januar 2019

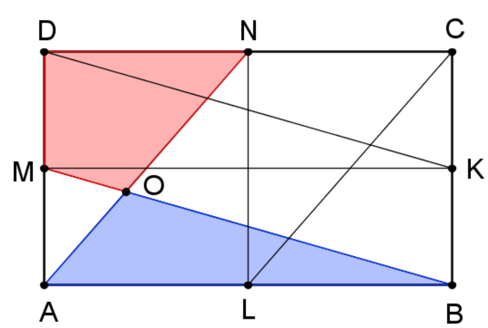
Opgaven:

□$ABCD$ er et rektangel og M og N er midtpunkter af AD og CD.
Linjerne BM og AN skærer hinanden i O.
Vis, at ΔABO og □$MOND$ har samme areal.



Løsning:

Vi trækker gennem M og N linjer MK og NL parallelle med AB og BC som vist. Desuden trækkes linjerne CL og DK. Rektanglerne $MABK$ og $MDCK$ har samme længde og bredde og dermed samme areal. Diagonalerne BM og DK halverer arealerne, så ΔABM har et areal på $\frac{1}{4}$ af arealet af □$ABCD$.



På samme måde halverer diagonalerne AN og CL rektanglerne $ADNL$ og $CNLB$, så ΔADN har et areal på $\frac{1}{4}$ af arealet af □$ABCD$.

Altså er $[\Delta ABM] = [\Delta ADN]$. Her betegner […] areal. Så får vi

$$[\Delta ABM] = [\Delta ADN] \quad \Leftrightarrow \quad [\Delta ABM] - [\Delta MOA] = [\Delta ADN] - [\Delta MOA]$$
$$\Leftrightarrow \quad [\Delta ABO] = [\square MOND]\ ,$$

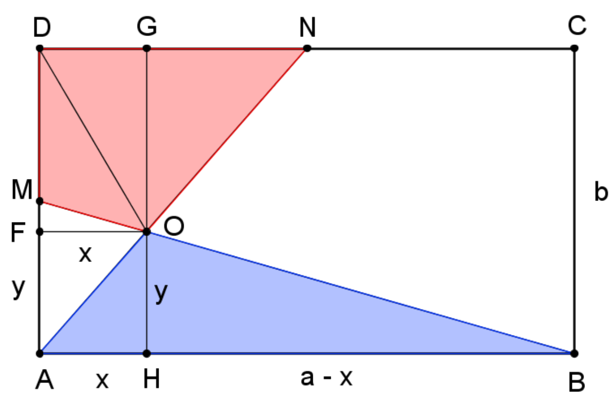
og det var netop det, der skulle vises.

Bemærkning. Vi har ikke ved argumentet oven for fået at vide, hvor stor en del af arealet af rektanglet *ABCD* de to arealer udgør. Det ser vi på nu.

Projektionerne af *O* på *AB* og *CD* er *H* og *G* og projektionen af *O* på *AD* er *F*. Vi sætter $OF = AH = x$ og $OH = AF = y$. Rektanglets sidelængder er $AB = CD = a$ og $AD = BC = b$. Så er $BH = a - x$.

Da ΔBOH og ΔBMA er ensvinklede, er

$$\frac{OH}{BH} = \frac{MA}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{a-x} = \frac{\frac{1}{2}b}{a} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\frac{1}{2}b}{a}(a-x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{b}{2a}(a-x)\ . \qquad (1)$$



Desuden er ΔAOF og ΔAND ensvinklede, så

$$\frac{OF}{FA} = \frac{ND}{DA} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}ay = bx \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{2bx}{a}\ . \qquad (2)$$

Af (1) og (2) får vi

$$\frac{b}{2a}(a-x) = \frac{2bx}{a} \quad \Leftrightarrow \quad 2a\cdot\frac{b}{2a}(a-x) = 2a\cdot\frac{2bx}{a} \quad \Leftrightarrow \quad b(a-x) = 4bx$$
$$\Leftrightarrow \quad ab - bx = 4bx \quad \Leftrightarrow \quad 5bx = ab \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{5}a\ .$$

Af (2) får vi så

$$y = \frac{2bx}{a} = \frac{2b\cdot\frac{1}{5}a}{a} = \tfrac{2}{5}b\ .$$

Så kan vi finde arealet:

$$[\Delta ABO] = \tfrac{1}{2}\cdot OH\cdot AB = \tfrac{1}{2}y\cdot a = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{5}b\cdot a = \tfrac{1}{5}ab\ .$$

Samme areal har □*MOND*. De to områder arealer udgør altså hver $\frac{1}{5}$ af rektanglets areal.

Vi kan dog også finde arealet af □*MOND* direkte. Vi ser nemlig, at

$$[\square MOND] = [\Delta DOM] + [\Delta DON] \,.$$

I ΔDOM er OF højde på siden DM, så

$$[\Delta DOM] = \tfrac{1}{2} OF \cdot DM = \tfrac{1}{2} x \cdot \tfrac{1}{2} b = \tfrac{1}{4} bx = \tfrac{1}{4} b \cdot \tfrac{1}{5} a = \tfrac{1}{20} ab \,.$$

I ΔDON er $OG = GH - OH = b - y$ og OG er højden på siden DN, så arealet bliver

$$[\Delta DON] = \tfrac{1}{2} OG \cdot DN = \tfrac{1}{2}(b-y) \cdot \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{4} a(b-y) = \tfrac{1}{4} a(b - \tfrac{2}{5} b)$$

$$= \tfrac{1}{4} a \cdot \tfrac{3}{5} b = \tfrac{3}{20} ab \,.$$

Altså er

$$[\square MOND] = [\Delta DOM] + [\Delta DON] = \tfrac{1}{20} ab + \tfrac{3}{20} ab = \tfrac{1}{5} ab \,.$$