Svar på opgave 2019-192 Februar 2019

Opgaven:

Vi ser på tallene

$$11\ ,\ 31\ ,\ 51\ ,\ 71\ ,\ 91\ ,\ 111\ ,\ 131\ ,\ \ldots$$

som er af formen $20k + 11$.
Vi udregner

$$11^5 - 51 = 161\,000 \quad , \quad 31^5 - 51 = 28\,629\,100 \quad , \quad 51^5 - 51 = 345\,025\,200\ ,\ \ldots$$

Vis i almindelighed, at $(20k + 11)^5 - 51$ er delelig med 100, dvs. at tallet ender på …00.

Løsning:

1. metode

Vi har følgende formler:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)\cdot(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^2\cdot(a + b)^2 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = (a + b)^3\cdot(a + b)^2 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\ .$$

Altså er

$$(20k + 11)^5 = (20k)^5 + 5\cdot(20k)^4\cdot 11 + 10\cdot(20k)^3\cdot 11^2$$

$$+ 10\cdot(20k)^2\cdot 11^3 + 5\cdot 20k\cdot 11^4 + 11^5\ .$$

$$= 3200000k^5 + 80000k^4\cdot 11 + 80000k^3\cdot 11^2 + 4000k^2\cdot 11^3 + 100k\cdot 11^4 + 11^5$$

$$= 100\cdot(32000k^5 + 800k^4\cdot 11 + 800k^3\cdot 11^2 + 40k^2\cdot 11^3 + k\cdot 11^4) + 11^5 = 100p + 11^5\ .$$

Her betegner p tallet i parentesen. Dermed har vi fundet, at

$$(20k + 11)^5 - 51 = 100p + 11^5 - 51 = 100p + 161000\ ,$$

og dette tal er selvfølgelig deleligt med 100.

2. metode

Det er de to sidste cifre i tallet $(20k + 11)^5 - 51$, der er afgørende, og disse cifre afgøres af de to sidste cifre i $(20k + 11)^5$. Vi skal derfor blot undersøge tallene
11^5, 31^5, 51^5, 71^5 og 91^5.

Vi får, at

$$11^5 = 161\,051 \quad , \quad 71^5 = 1\,804\,229\,351$$
$$31^5 = 28\,629\,151 \quad , \quad 91^5 = 6\,240\,321\,451\ .$$
$$51^5 = 345\,025\,251$$

Altså ender tallene $(20k + 11)^5$ på 51, så $(20k + 11)^5 - 51$ ender på 00.