Svar på opgave 2019-193 Marts 2019

Opgaven:

Find alle talsæt af hele positive tal (x,y,z), der opfylder, at

$$x + y + z = 97$$

$$\frac{4x}{5} + \frac{5y}{6} + \frac{6z}{7} = 82 \ .$$

Løsning:

Da de tre brøker i den anden ligning er hele tal, må x være delelig med 5, y delelig med 6 og z delelig med 7. Derfor kan vi sætte

$$x = 5a \ , \ y = 6b \ , \ z = 7c \ , \qquad (1)$$

hvor a, b og c er positive hele tal. De to ligninger ser nu sådan ud:

$$5a + 6b + 7c = 97 \qquad (2)$$
$$4a + 5b + 6c = 82 \qquad (3)$$

Vi trækker (3) fra (2) og får

$$a + b + c = 15 \quad \text{hvoraf} \quad c = 15 - a - b \ . \qquad (4)$$

Dette indsættes i (3):

$$4a + 5b + 6(15 - a - b) = 82 \quad \Leftrightarrow \quad 4a + 5b + 90 - 6a - 6b = 82$$

$$\Leftrightarrow \quad -2a - b = -8 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + b = 8$$

Da a og b er positive hele tal har vi mulighederne i skemaet:

a	b
1	6
2	4
3	2

Hver af disse muligheder for a og b indsætter vi i (4), så vi får skemaet

a	b	c
1	6	8
2	4	9
3	2	10

Så finder vi x, y og z af (1), så vi til slut får skemaet:

a	b	c	x	y	z
1	6	8	5	36	56
2	4	9	10	24	63
3	2	10	15	12	70

Ligningssystemet har altså de tre løsninger inden for de hele positive tal:

$$(x,y,z) \ : \ (5,36,56) \ , \ (10,24,63) \ , \ (15,12,70) \ .$$