

Svar på opgave 2019-196

Juni 2019

Opgaven:

De ulige hele tal skrives op i et talskema på følgende måde:

Række 1 : 1
 Række 2 : 3 5
 Række 3 : 7 9 11
 Række 4 : 13 15 17 19

.....

Hver række indeholder et tal mere end forrige række.
 Hvad er summen af tallene i række 100?

Løsning:

Antallet af tal i hver række vokser med 1 i forhold til rækken oven over. Der er altså 100 tal i række 100. Samtlige rækker til og med række 99 indeholder derfor

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99$$

tal. Vi har, at

$$s = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99$$

$$s = 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 .$$

Vi lægger sammen:

$$2s = 100 + 100 + 100 + \dots + 100 + 100 = 99 \cdot 100 = 9900 ,$$

så $s = 4950$. Dette betyder, at række 100 består af de ulige tal begyndende med ulige tal nr. 4951 og sluttende med ulige tal nr. 5050.

Vi ser, at

ulige tal nr. 1 er 1
 ulige tal nr. 2 er $3 = 2 \cdot 2 - 1$
 ulige tal nr. 3 er $5 = 2 \cdot 3 - 1$
 ulige tal nr. 4 er $7 = 2 \cdot 4 - 1$

osv. Altså er ulige tal nr. 4951 tallet $2 \cdot 4951 - 1 = 9901$. Række nr. 100 består derfor af tallene

$$9901 , 9903 , 9905 , \dots , 10097 , 10099 .$$

Vi skal finde summen t af disse tal. Vi kan skrive, at

$$t = 9901 + 9903 + 9905 + \dots + 10095 + 10097 + 10099$$

$$t = 10099 + 10097 + 10095 + \dots + 9905 + 9903 + 9901 .$$

Vi lægger sammen og får

$$2t = 20000 + 20000 + \cdots + 20000 + 20000 = 100 \cdot 20000 = 2\,000\,000,$$

så den søgte sum er $t = 1\,000\,000$.

Alternativ løsning

Vi ser på det første tal i hver række og prøver at finde en sammen- hæng mellem dette og rækkens nummer. Ved hjælp af kvadrattal finder vi, at

$$\text{i række 2 er det første tal 3, og } 3 = 2^2 - 1$$

$$\text{i række 3 er det første tal 7, og } 7 = 3^2 - 2$$

$$\text{i række 4 er det første tal 13, og } 13 = 4^2 - 3.$$

Altså går vi ud fra, at der gælder, at

$$\text{i række } n \text{ er det første tal } n^2 - (n - 1) = n^2 - n + 1.$$

Dermed er det første tal i række 100 tallet $100^2 - 100 + 1 = 9901$.

Dernæst ser vi på rækkernes summer. Vi får at

$$\text{række 1 har summen 1}$$

$$\text{række 2 har summen } 3 + 5 = 8 = 2^3$$

$$\text{række 3 har summen } 7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$

$$\text{række 4 har summen } 13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3.$$

Vi regner derfor med, at summen i række 100 er $100^3 = 1\,000\,000$.