Svar på opgave 2019-198 Oktober 2019

Opgaven:

En række hele tal kaldes *konsekutive*, hvis de følger lige efter hinanden i talrækken. Således er tallene -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 konsekutive.

Summen af en række konsekutive positive hele tal er 2000. Angiv samtlige muligheder for at opskrive en sådan sum.

Løsning:

Vi kan skrive de konsekutive hele tal sådan:

$$n\,,\ n+1\,,\ \cdots\,,\ n+k-1\ ,\ n+k\ .$$

Her er der $k+1$ led. Summen af disse led skal være 2000 og desuden skal summen af leddene i modsat rækkefølge også være 2000, så vi får

$$n + (n+1) + \cdots + (n+k-1) + (n+k) = 2000$$

$$(n+k) + (n+k-1) + \cdots + (n+1) + n = 2000\ .$$

Når vi lægger disse ligninger sammen, så led, der står lodret over hinanden adderes, får vi

$$(2n+k) + (2n+k) + \cdots + (2n+k) + (2n+k) = 4000\ .$$

Der er her $k+1$ ens parenteser, så

$$(k+1)(2n+k) = 4000\ .$$

De to faktorer $k+1$ og $2n+k$ har altså et produkt på 4000. Da $2n > 1$, er $2n+k > k+1$, så den sidste faktor er større end den første. Mulighederne fremgår af tabellen herunder:

$2n+k$	2000	1000	800	500	400	250	200	160	125
$k+1$	2	4	5	8	10	16	20	25	32

Hvis $2n+k$ er lige, må k være lige, fordi $2n$ er det. Men så er $k+1$ ulige. Dette giver mulighederne

$$\text{I. } 2n+k = 800 \text{ og } k+1 = 5\quad ,\quad \text{II. } 2n+k = 160 \text{ og } k+1 = 25\ .$$

Hvis $2n+k$ er ulige, er k ulige, fordi $2n$ er lige. Så er $k+1$ lige. Dette giver muligheden

$$\text{III. } 2n+k = 125 \text{ og } k+1 = 32\ .$$

Vi gennemgår mulighederne hver for sig.

I. $2n + k = 800$ og $k + 1 = 5$ giver $k = 4$ og $n = 398$. Dermed får vi summen af 5 tal:

$$398 + 399 + 400 + 401 + 402 = 2000 .$$

II. $2n + k = 160$ og $k + 1 = 25$ giver $k = 24$ og $n = 68$. Vi får summen af 25 tal:

$$68 + 69 + 70 + \cdots + 91 + 92 = 2000 .$$

III. $2n + k = 125$ og $k + 1 = 32$ giver $k = 31$ og $n = 47$. Vi får summen af 32 tal:

$$47 + 48 + 49 + \cdots + 77 + 78 = 2000 .$$

Bemærkning. Hvis vi i stedet for 2000 havde brugt tallet 2020 (det kommende årstal), havde vi fået følgende tabel:

$2n + k$	2020	1010	808	505	404	202	101
$k + 1$	2	4	5	8	10	20	40

Argumenter som ovenstående giver os igen tre fremstillinger af 2020 som sum af konsekutive positive hele tal:

Sum af 5 tal : $402 + 403 + 404 + 405 + 406 = 2020$

Sum af 8 tal : $249 + 250 + 251 + 252 + 253 + 254 + 255 + 256 = 2020$

Sum af 40 tal : $31 + 32 + 33 + \cdots + 68 + 69 + 70 = 2020$.