

Svar på opgave 2019-199

November 2019

Opgaven:

Løs ligningen

$$\frac{1+3+5+\dots+2017+2019}{2+4+6+\dots+2018+2020} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2020} .$$

Løsning:

Vi kan skrive tælleren t på to måder:

$$t = 1 + 3 + 5 + \dots + 2017 + 2019$$

$$t = 2019 + 2017 + 2015 + \dots + 3 + 1$$

Vi lægger disse to ligninger sammen, så led, der står over hinanden, adderes:

$$2t = 2020 + 2020 + \dots + 2020 + 2020 .$$

Der er her 1010 eksemplarer af tallet 2020, så

$$2t = 1010 \cdot 2020 \quad \Leftrightarrow \quad t = 1010 \cdot 1010 .$$

Hvert led i nævneren n er 1 større end leddet oven over i tælleren, og da der er 1010 led, er nævneren 1010 større end tælleren, så

$$n = t + 1010 = 1010^2 + 1010 .$$

Alternativt kan man udregne nævneren efter samme metode som tælleren.

Ligningen får dermed udseendet

$$\frac{1010^2}{1010^2 + 1010} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2020} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1010}{1010+1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2020} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1010}{1011} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2020} .$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{1010}{1011} - \frac{1}{2020} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{1010 \cdot 2020 - 1011}{1011 \cdot 2020}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1011 \cdot 2020}{1010 \cdot 2020 - 1011} = \frac{2\,042\,220}{2\,039\,189} \approx 1,001486 .$$