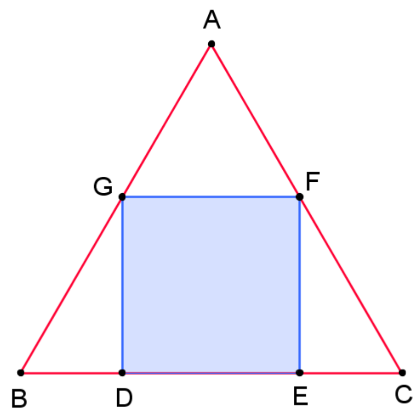
Svar på opgave 2019-200
December 2019

Opgaven:

I den ligesidede ΔABC er indskrevet et kvadrat *DEFG*, hvis vinkelspidser ligger på siderne som vist. Hvor stor en brøkdel af trekantens areal udgør kvadratets areal?



Løsning:

Vi kan antage, at sidelængden i den ligesidede trekant er 1. Vi sætter $AF = AG = x$, så $FC = GB = 1 - x$. Desuden sætter vi $BD = EC = a$.
Idet $BC = 1$, får vi

$$a + x + a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2a + x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \tfrac{1}{2}(1 - x). \qquad (1)$$

Længden af højden *AH* fra *A* betegnes med *h* og i ΔAHC giver Pythagoras

$$h^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = 1 - \tfrac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \tfrac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad h = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

I ΔFEC giver Pythagoras

$$x^2 + a^2 = (1 - x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + a^2 = 1 + x^2 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 1 - 2x\,. \qquad (2)$$

Af ligning (1) fås ved kvadrering:

$$a^2 = \tfrac{1}{4}(1 - x)^2 = \tfrac{1}{4}(1 + x^2 - 2x)\,,$$

og indsætter vi dette i (2), får vi

$$1-2x=\tfrac{1}{4}(1+x^2-2x)$$

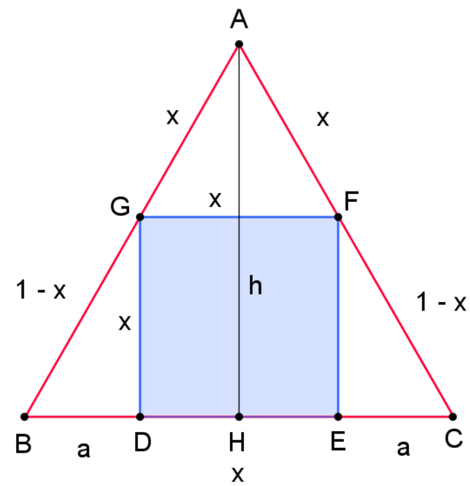
$$\Leftrightarrow \quad 4-8x=1+x^2-2x$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+6x-3=0\ .$$

Denne andengradsligning har løsningerne

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{36+12}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{48}}{2}$$

$$=-3\pm\sqrt{12}\ .$$



Da x er positiv, er $x=\sqrt{12}-3$.

Arealet af ΔABC er

$$[\Delta ABC]=\tfrac{1}{2}h\cdot BC=\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1=\tfrac{\sqrt{3}}{4}\ .$$

Arealet af kvadratet er

$$x^2=\left(\sqrt{12}-3\right)^2=12+9-6\sqrt{12}=21-6\sqrt{12}\ .$$

Den brøkdel, som kvadratets areal udgør af trekantens er dermed

$$\frac{21-6\sqrt{12}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{84-24\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\frac{84\sqrt{3}-24\sqrt{36}}{3}=\frac{84\sqrt{3}-144}{3}=28\sqrt{3}-48\approx 0{,}4974.$$

Kvadratets areal udgør altså en smule under halvdelen af trekantens.

Alternativ løsning. Højden fra A skærer GF i K og BC i H. Vi lader $2a$ betegne sidelængden i den ligesidede trekant og $2x$ sidelængden i kvadratet. Så er $BH = a$ og $DH = x$, så $BD = a - x$. Desuden er $AH = h$ højden og $KH = 2x$, så $AK = h - 2x$. Af ΔAHB får vi ved Pythagoras

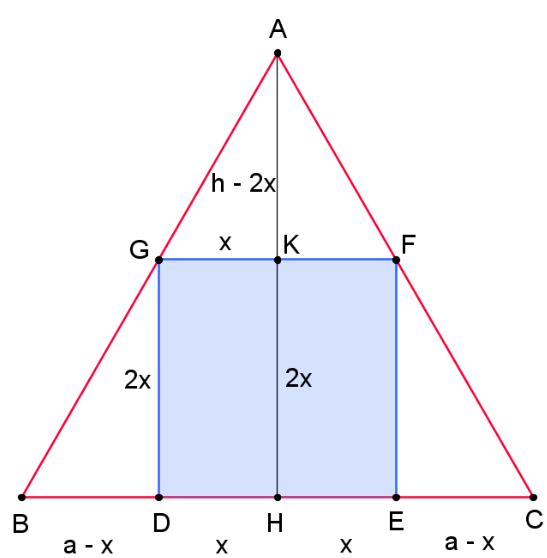
$$h^2 + a^2 = (2a)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad h^2 + a^2 = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow \quad h^2 = 3a^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = a\sqrt{3}\ .$$

Trekantens areal er

$$T=\tfrac{1}{2}h\cdot 2a=\tfrac{1}{2}\cdot a\sqrt{3}\cdot 2a=a^2\sqrt{3}\ ,$$



og kvadratets areal er $(2x)^2 = 4x^2$. Vi skal derfor udregne forholdet

$$\frac{4x^2}{a^2\sqrt{3}} \quad \text{eller} \quad \frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\,.$$

Nu er ΔAKG og ΔAHB ensvinklede, så

$$\frac{AK}{GK} = \frac{AH}{BH} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h-2x}{x} = \frac{h}{a}\,.$$

Ved at gange over kors kan dette omskrives til

$$ah - 2ax = hx \quad \Leftrightarrow \quad ah = hx + 2ax \quad \Leftrightarrow \quad ah = x(h + 2a)$$

$$\Leftrightarrow \quad a\cdot a\sqrt{3} = x(a\sqrt{3}+2a) \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot a\sqrt{3} = ax(\sqrt{3}+2) \quad \Leftrightarrow \quad a\sqrt{3} = x(\sqrt{3}+2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-2\right)}{\left(\sqrt{3}+2\right)\left(\sqrt{3}-2\right)} = \frac{3-2\sqrt{3}}{3-4} = 2\sqrt{3}-3\,.$$

Heraf fås

$$\frac{x^2}{a^2} = \left(2\sqrt{3}-3\right)^2 = 4\cdot 3 + 9 - 12\sqrt{3} = 21 - 12\sqrt{3}\,,$$

og dermed bliver det søgte forhold

$$\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(21-12\sqrt{3}\right) = \frac{84}{\sqrt{3}} - 48 = 28\sqrt{3} - 48 \approx 49{,}74\%\,.$$

Med løsningen på opgave 200 afsluttes Månedens Opgave efter at have eksisteret i 20 år. Mange lærere kan måske have interesse i at anvende opgaver fra samlingen i undervisningen.

Samtlige opgaver i nybearbejdet form med fuldstændige løsninger findes nu på uvmat.dk-websitet: **https://uvmat.dk/maaned/MaanedensOpgave.pdf**