χ^2-test med kendte sandsynligheder

Eksempel 1: Mendels forsøg

Georg Mendel offentliggjorde resultaterne af sine eksperimenter om nedarvning af bønneplanters fænotype i 1866. 556 planter blev undersøgt og inddelt efter deres form – rynkede/runde og grønne/gule.

Type	Antal
Runde, gule	315
Runde, grønne	108
Rynkede, gule	101
Rynkede, grønne	32

Ifølge Mendels teori skulle disse fænotyper forekomme i forholdet 9 : 3 : 3 : 1, eftersom de to fænotyper forventes at være uafhængige og fordi begge fænotyper udviser dominans – gul dominerer over grøn og rund dominerer over rynkede.

Ifølge Mendels model skulle de forventede sandsynligheder for de fire grupper være:

Ho: $p_{ru,gu}=9/16$ $p_{ru,gr}=3/16$ $p_{ry,gu}=3/16$ $p_{ry,gr}=1/16$

Hvis vi antager, at Mendels teori er sand (altså tror på ovenstående fordeling), så vil vi forvente, at $556 \cdot 5/6=312{,}75$ planter ud af 556 vil have runde og gule bønner. Hvis vi laver de samme beregninger for de andre grupper så kan vi opstille følgende tabel

Type	Obs.	Forventet
Runde, gule	315	312,75
Runde, grønne	108	104,25
Rynkede, gule	101	104,25
Rynkede, grønne	32	34,75

Heraf ses, at det observerede antal og det antal vi forventer at se, hvis Ho-hypotesen er sand, er meget tæt på hinanden. Vi vil teste om hypotesen er sand ved hjælp af X^2-testen.

X^2-værdien udregnes til

$$X^2 = \frac{(315-312{,}75)2}{312{,}75} + \frac{(108-104{,}25)2}{104{,}25} + \frac{(101-104{,}25)2}{104{,}25} + \frac{(32-34{,}75)2}{34{,}75} = 0{,}47$$

Vi sammenligner denne værdi med en X^2 (3) fordeling, fordi vi jo har fire kategorier og dermed 3 frihedsgrader. Den kritiske værdi for en X^2(3) fordeling, når vi tester med et signifikansniveau på 0,05, er 7,81. Eftersom X^2 = 0,47 er mindre end 7,81 så kan vi ikke forkaste nulhypotesen. Tilsvarende er P = 0,92 > 0,05, så vi forkaster ikke hypotesen. Med andre ord, så strider disse date ikke med Mendels hypotese.

TI-nspire

$obs := \{315,108,101,32\}$ $\{315,108,101,32\}$

$forventet := \{312.75,104.25,104.25,34.75\}$ $\{312.75,104.25,104.25,34.75\}$

$\chi^2\text{GOF } obs,forventet,3: stat.results$

$$\begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{ GOF"} \\ \text{"}\chi^2\text{"} & 0.470024 \\ \text{"PVal"} & 0.925426 \\ \text{"df"} & 3. \\ \text{"CompList"} & \text{"\{...\}"} \end{bmatrix}$$

Se fremgangsmåden i næste eksempel.

Eksempel 2: Togenskryds (laboratorieøvelse)

Brug bestrålede frø med varianterne hvid/grøn og høj/lav. Der følger vejledning med frøene.

Her tester vi de 4 fænotyper mod den teoretisk, forholdsmæssig fordeling i de 4 kategorierne. Denne type X^2 test kaldes Goodness of fit.

Hypotese: Plantevarianterne udspaltes i forholdet 9 : 3 : 3 : 1
Alternativ: Plantevarianterne udspaltes ikke i forholdet 9 : 3 : 3 : 1
Vi håber på, at hypotesen bliver bevaret, da det er vores teori.

Eksempel på resultat:

	Høje og grønne	Høje og hvide	Små og grønne	Små og hvide	sum
Obs	57	14	12	4	87
Forventet	48,94	16,31	16,31	5,43	87

Her sammenligner vi en række observerede tal med en række teoretiske tal, som er 87*9/16, 87*3/16, 87*3/16 og 87/16. Der er 3 frihedsgrader, da det fjerde tal skal sørge for, at summen bliver 87.

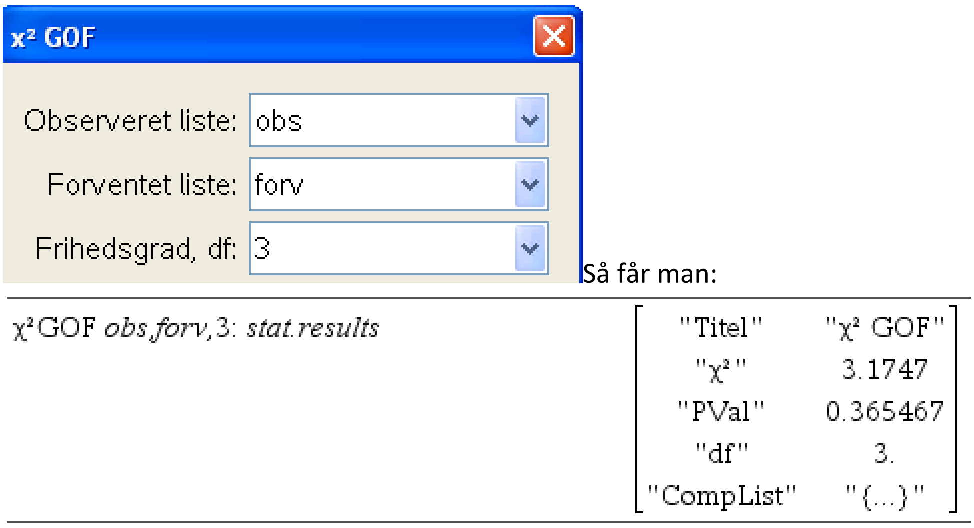
P = 0,365. Konklusion: Hypotesen kan ikke forkaste, så ærterne følger den forventede fordeling.

Ti-nspire:

$obs := \{57,14,12,4\}$ $\{57,14,12,4\}$

$forv := \{48.94,16.31,16.31,5.44\}$ $\{48.94,16.31,16.31,5.44\}$

Klik $\bar{X}$ og vælg Stat tests og derpå χ^2 GOF :

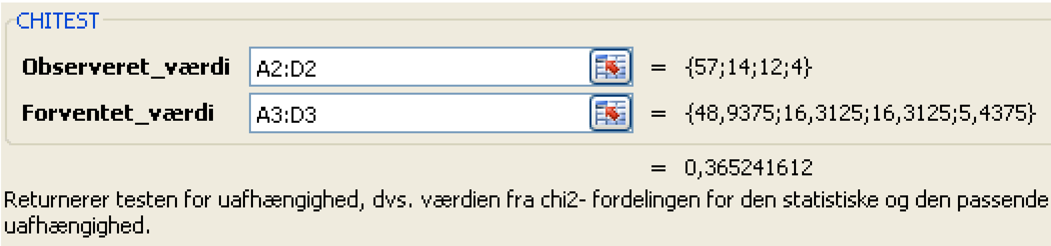


Så får man:

Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1	højgrøn	højhvid	smågrøn	småhvid			
2	57	14	12	4	87		
3	48,9375	16,3125	16,3125	5,4375	87	p =	0,365242

Hvor P er beregnet ved:



Eksempel 3: Togenskryds med epistasi

Her benyttes f.eks. byg med grønne, gule og hvide blade (normal, xanta og albino). Der er kun 3 fænotyper, idet to af fænotyperne smelter sammen. Den teoretiske fordeling er 9 : 3 : 4, og testen laves som ovenstående bare med 3 kategorier og 2 frihedsgrader.

Hypotese: udspaltningen følger 9 : 3 : 4 fordelingen (altså 9/16, 3/16 og 4/16)

Her er et eksempel på en klasses resultater:

	Normal	Xanta	Albino	
Observeret	128	29	41	198
Forventet	111,375	37,125	49,5	198
	2,481622	1,778199	1,459596	5,719416

P =	0,057285

Konklusion: Hypotesen kan ikke forkastes. Udspaltningen følger den forventede fordeling, men resultatet er ikke overbevisende.

χ^2 -test for uafhængighed i 2x2 skema

Eksempel 4: Kastrering og sukkersyge

Betydningen af tidlig kastrering af mus i forhold til udvikling af sukkersyge er blevet testet på ikke-overvægtige mus. Forventningen var, at tidlig kastrering øger sandsynligheden for udvikling af sukkersyge.

100 mus blev tilfældigt delt i to grupper og de 50 mus i den ene gruppe blev kastreret dagen efter de blev født. 26 af de 50 kastrerede mus havde efter 112 dage udviklet sukkersyge, mens kun 12 af de ikke-kastrerede mus havde sukkersyge. Dette kan samles i en 2 x 2 tabel:

	Sukkersyge	Ikke sukkersyge	I alt
Kastrerede	26	24	50
Ikke-kastrerede	12	38	50
Ialt	38	62	100

Hvis vi lader p_1 og p_2 angive sandsynligheden for udvikling af sukkersyge for henholdsvis kastrerede og ikke-kastrerede, så ønsker vi at teste hypotesen

H_0: $p_1 = p_2$ mod H_A : $p_1 \neq p_2$

eller H_0: udvikling af sukkersyge er uafhængig af om musen er kastreret

H_A : udvikling af sukkersyge afhænger af om musen er kastreret

Vi bruger ligesom før formlen

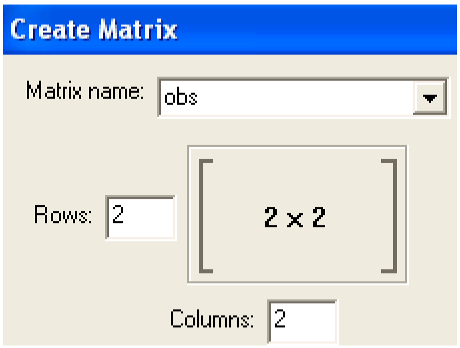
$$X^2 = \sum_i \frac{(observerer\ i - forventede\ i)2}{forventede}$$

Og får X^2=8,3192.

Dette tal svarer til X^2 med 1 frihedsgrad og får en p-værdi på 0,003923. Da der er tale om en ensidig hypotese så skal dette tal divideres med 2 og vi får den endelige p-værdi til 0,0039.

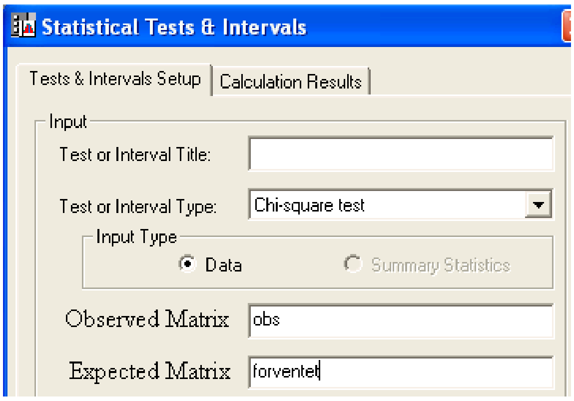
Da 0,0039 < 0,05, forkastes nulhypotesen, og vi kan konkludere, at tidlig kastrering ændrer risikoen for udvikling af sukkersyge hos normalvægtige mus, og vi kan se, at risikoen er øget.

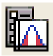
Ti-Interactive

Insert matrix: 

. Indtast tallene.

$$obs := \begin{bmatrix} 26. & 24. \\ 12. & 38. \end{bmatrix} \quad forventet := \begin{bmatrix} 19. & 31. \\ 19. & 31. \end{bmatrix}.$$



Vælg og  og

Chi-square test

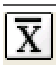
$p = .003923$

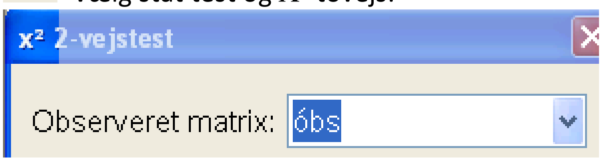
$X^2 = 8.31919$

$df = 1.$

TI-nspire

$$óbs := \begin{bmatrix} 26 & 24 \\ 12 & 38 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 26 & 24 \\ 12 & 38 \end{bmatrix}$$

 Vælg stat test og X^2 tovejs:



$\chi^2 2way\ óbs: stat.results$

$$\begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{ 2-vejstest"} \\ \text{"}\chi^2\text{"} & 8.31919 \\ \text{"PVal"} & 0.003923 \\ \text{"df"} & 1. \\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"} \\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"} \end{bmatrix}$$

Excel

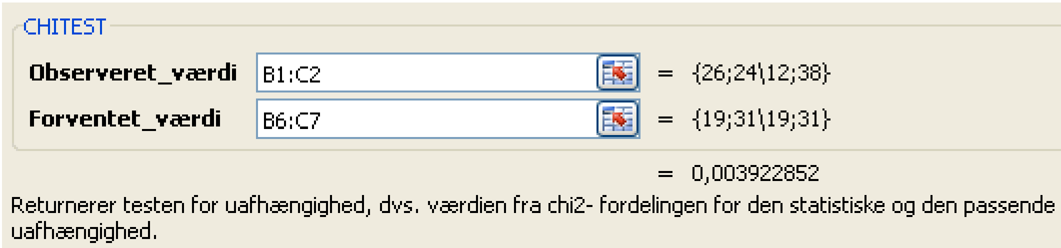
Indtast de 4 tal samt række- og søjlesummer:

	A	B	C	D
1	Obs	26	24	50
2		12	38	50
3		38	62	100

Beregn den første forventede værdi med formlen fx =$D1*B$3/D3.

Denne formel kan nu kopieres til de tre andre celler.

Vælg f_x = Chitest:



Eksempel 5: Priktest (laboratorieøvelse)

Øvelse med følsomhed på læber, fingre og ryg

Teori: på forskellige steder af kroppen har vi forskellig følsomhed, der bl.a. udtrykker sig ved, om vi kan føle forskel på 1 og 2 prik.

Materialer: pap, opvaskebørste, saks, tape og lineal

Fremgangsmåde: Hver 3-mandsgruppe klipper 3 stive hår af opvaskebørsten og klipper 3 små stykker pap (1x5 cm). Klæb et hår på hvert stykke pap.
En person er forsøgsperson og får bind for øjnene, en anden person er skriver og den tredje er prikkeren, der udfører øvelsen. Prikkeren tager 2 af papstykkerne i den ene hånd, så afstanden mellem hårenes spidser er 1 mm. Det er vigtigt, at hårene er lige lange. De kan evt. klippes til. I den anden hånd holdes det 3die stykke pap. Prikkeren skal nu stikke forsøgspersonen med 1 eller 2 prik på pegefingerens yderste blomme, og forsøgspersonen skal sige, om der er 1 eller 2 prik. Skriveren skal skrive resultaterne op i følgende skema:

Navn:____________ Hver person forsøger og udfylder mindst 7 ting med præcis 20 forsøg hvert sted:

Læbe		Stik med		
Mm: 1		1	2	sum
svar	1			
	2			
	sum			

Læbe		Stik med		
Mm: 2		1	2	sum
svar	1			
	2			
	sum			

Læbe		Stik med		
Mm: 3		1	2	sum
svar	1			
	2			
	sum			

Finger		Stik med		
Mm: 1		1	2	sum
svar	1			
	2			
	sum			

Finger		Stik med		
Mm: 2		1	2	sum
svar	1			
	2			
	sum			

Finger		Stik med		
Mm: 3		1	2	Sum
svar	1			
	2			
	sum			

Ryg		Stik med		
Cm		1	2	sum
svar	1			
	2			
	sum			

		Stik med		
		1	2	sum
svar	1			
	2			
	sum			

		Stik med		
		1	2	sum
svar	1			
	2			
	sum			

Mm = afstand mellem hårene.
Skemaet skal stilles op som angivet. De rigtige svar står på skrå for hinanden.

Forsøget gentages 20 gange. Det er vigtigt, at prikkeren varierer antallet, så forsøgspersonen ikke kan gætte sig til resultatet. Det er også bedst, hvis der er nogenlunde lige mange 1- og 2-prik. Dernæst skubbes pappet i forhold til hinanden, så der nu er 2 mm imellem. Forsøget gentages. Skift til 3 mm osv. Når der tydeligvis kun er rigtige svar, skiftes til læberne. Til sidst prøver man på ryggen bare med 1 eller 2 fingre.

X^2 **test**: Vi vil teste følgende hypotese:

Hypotese: Svarene er helt tilfældige (personen kan ikke føle forskel og gætter bare på et tal)

Alternativ hypotese: Forsøgspersonen gætter ikke tilfældigt men kan føle forskel.

F.eks fås

Sted: læbe		Stik med		
Mm:2		1	2	sum
svar	1	7	3	10
	2	2	8	10
	sum	9	11	20

P = 0,0246 < 0,05

Hypotesen forkastes, og der er en overvægt af rigtige svar (7 og 8 mod 2 og 3), så forsøgspersonen kan føle forskel.

Forventet

	1 stik	2 stik	I alt
svarer 1	4,5	5,5	10,0
svarer 2	4,5	5,5	10,0
I alt	9,0	11,0	20,0

χ^2-test for uafhængighed i 2x3 skema

Eksempel 6: Evolution og overlevelse (laboratorieøvelse)

"Naturlig udvælgelse"

(De bedst tilpassede har den største chance for overlevelse)

Formål:
Formålet med denne øvelse er at efterligne den naturlige udvælgelsesproces ved at bruge bønner i forskellige farver på forskellige baggrunde.

Matrialer:
50 hvide bønner, 50 brune bønner og 50 røde bønner
1 ark hvidt, 1 ark brunt karton og 1 ark sort karton (evt. middagsservietter)

Fremgangsmåde:
1. Arbejd parvis eller 3 og 3
2. Læg alle bønnerne på et ark karton.
3. En elev i gruppen lukker øjnene i 10 sekunder. Efter 10 sekunder åbnes øjnene igen kortvarigt og du tager den første bønne, du ser, og lægger den til side. Luk hurtigt øjnene igen. Tæl til ti – åbn øjnene – tag igen den første bønne du ser – luk øjnene. Gør dette i alt 24 gange. Bland ind imellem bønnerne på kartonen.
4. Når I er færdige tælles alle bønnerne og noteres i et skema
5. Læg nu alle bønnerne på næste farve karton. Gentag punkt 2 - 4.
6. Gentag punkt 5 på den tredje farve karton.
7. Lav chi-i-anden testen beskrevet nedenfor.
8. Saml evt. hele klassens resultater for hver farve karton for sig.

Resultater:

Hvidt karton	Observeret		Forventet	
	"Spiste bønner"	**"Overlevede bønner"**	**"Spiste bønner"**	**"Overlevede bønner"**
Hvide				
Brune				
Røde				

Brunt karton	Observeret		Forventet	
	"Spiste bønner"	**"Overlevede bønner"**	**"Spiste bønner"**	**"Overlevede bønner"**
Hvide				
Brune				
Røde				

Rødt karton	Observeret		Forventet	
	"Spiste bønner"	**"Overlevede bønner"**	**"Spiste bønner"**	**"Overlevede bønner"**
Hvide				
Brune				
Røde				

Diskussion

- Hvilken bønnefarve "overlevede" bedst på det hvide/lysebrune/røde karton? Hvad kan grunden være?
- Hvilken bønnefarve "overlevede" dårligst på det hvide/lysebrune/røde karton? Hvad kan grunden være?
- Lav en χ^2-test for fordelingen af bønner på hver af de tre farver karton (se fremgangsmåde neden for). Antag at bønnerne vælges helt tilfældig. Det vil sige, at vores hypotese er: Den farve, de udvalgte bønner har, er uafhængig af baggrundsfarven, eller sagt på en anden måde: alle bønner har lige stor chance for overlevelse. Den alternative hypotese er så, at overlevelse afhænger af baggrundsfarve.
  Beregn størrelsen af χ^2 og find ud af om I skal forkaste hypotesen. Formuler jeres resultat i en sætning, hvor ordet "hypotese" slet ikke må optræde. Sætningen skal kun handle om bønner, farver og overlevelse.

χ^2- test (ki-i-anden-test)

χ^2-testen bruges til at test en hypotese. Hypotesen skal være udformet sådan, at vi kan beregne den forventede værdi for hver af de 3*2 = 6 grupper. Derpå udregner man for hver af grupperne (observeret værdi – forventet værdi)^2/ (forventet værdi). Denne udregning giver 6 tal, som man summerer (lægger sammen). Sagt på en anden måde:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{K=3} \frac{(\text{Observeret} \ - \text{Forventet})^2}{\text{Forventet}}$$

Hvis man observerer de forventede værdier bliver $\chi^2 = 0$. I praksis rammer man ikke det forventede så præcist. Verden er fuld af naturlig variation, hvilket vi kender fra spil med terninger. Nogen er heldige og nogle er uheldige.

Jo større afvigelsen er mellem det observerede og det forventede, jo større bliver χ^2. På et eller andet tidspunkt må vi sige, at afvigelsen er så stor, at vi ikke tror på, at variationen mellem observeret og forventet skyldes naturlig variation, men at det derimod skyldes, at vores hypotese ikke er korrekt. I dette tilfælde går grænsen ved tallet 5,99. Hvis $\chi^2 > 5{,}99$ siger vi, at vi forkaster hypotesen, og accepterer den alternative hypotese.

Til et større projekt kunne man lave nogle variationer, hvor forskellige elever lånt i kantinen tager 3 bønner hver, sådan at indlæring mindskes. Desuden kunne man lave mindst 7 grupper, så der bliver mindst 21 tests. Derved kan man se, om der ikke skulle være nogen, der får en konklusion modsat de andres (1 ud af 20 tests, hvis man bruger signifikans = 0,05)

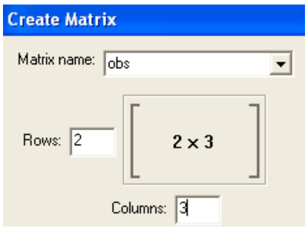
Her ses et af holdenes resultater for hvidt karton:

Hvidt karton						
		hvid	brun	rød	sum	
Observeret:	spist	3 (8)	9 (8)	12 (8)	24	
	ikke-spist	47 (42)	41 (42)	38 (42)	126	P = 0,0439

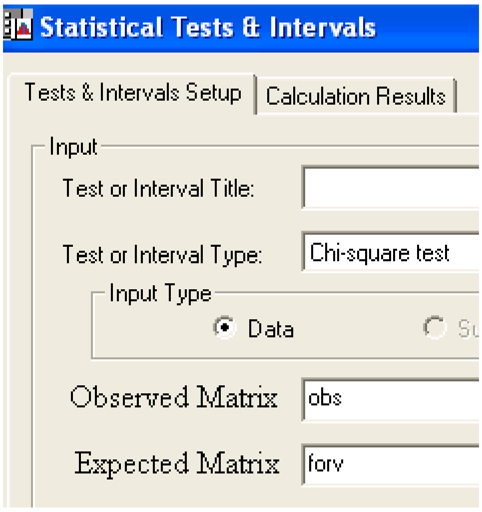
De forventede tal er i parentes, og de observerede er farvet blå, hvis de er markant under den forventede værdi, og røde, hvis de er markant over. Denne farvning er subjektiv, men den gør det lettere at drage en konklusion.

Konklusion: da P > 0,05, forkastes hypotesen. Der spises markant færre hvide på hvid baggrund, og der er især de røde, der spises.

Ti-Interactive

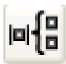
Insert Matrix: 

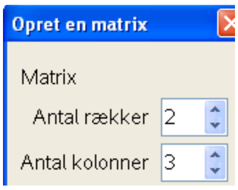
.Vælg antal rækker og søjler. Indtast tallene.



Chi-square test
$p = .043937$
$X^2 = 6.25$
$df = 2.$

TI-nspire

Skriv først et matrix navn og vælg matrix:  og  .



Vælg antal rækker og søjler.

 Vælg Stat test og X^2 2-vejs test.

Vælg matricen.

$$bønner := \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 47 & 41 & 38 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 \\ 47 & 41 & 38 \end{bmatrix}$$

$$\chi^2 2way\ bønner: stat.results \qquad \begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"}\chi^2\text{ 2-vejstest"} \\ \text{"}\chi^2\text{"} & 6.25 \\ \text{"PVal"} & 0.043937 \\ \text{"df"} & 2. \\ \text{"ExpMatrix"} & \text{"[...]"} \\ \text{"CompMatrix"} & \text{"[...]"} \end{bmatrix}$$

Excel

Hvidt karton

		hvid	brun	rød	sum		
Observeret:	spist	3	9	12	24		
	ikke-spist	47	41	38	126	P =	0,0439
Forventet	spist	8	8	8	24		
	ikke-spist	42	42	42	126