

MATEMATIK
A-NIVEAU

MATHIT Prøvesæt 2010

Kl. 09.00 – 14.00

Opgavesættet er delt i to dele.

Delprøve 1: 2 timer med autoriseret formelsamling

Delprøve 2: 3 timer med alle hjælpemidler

Delprøven uden hjælpemidler består af opgave 1-8 med i alt 12 spørgsmål.

Delprøven med hjælpemidler består af opgave 9-13 med i alt 13 spørgsmål.

De 25 spørgsmål indgår med lige vægt i bedømmelsen.

Bedømmelsen af det skriftlige eksamenssæt

I bedømmelsen af besvarelsen af de enkelte spørgsmål og i helhedsindtrykket vil der blive lagt vægt på, om eksaminandens tankegang fremgår klart af besvarelsen. Dette vurderes blandt andet ud fra kravene beskrevet i de følgende fem kategorier:

1. TEKST

Besvarelsen skal indeholde en forbindende tekst fra start til slut, der giver en klar præsentation af, hvad den enkelte opgave og de enkelte delspørgsmål går ud på.

2. NOTATION OG LAYOUT

Der kræves en hensigtsmæssig opstilling af besvarelsen i overensstemmelse med god matematisk skik, herunder en redegørelse for den matematiske notation, der indføres og anvendes, og som ikke kan henføres til standardviden.

3. REDEGØRELSE OG DOKUMENTATION

Besvarelsen skal indeholde en redegørelse for den anvendte fremgangsmåde og dokumentation i form af et passende antal mellemregninger og/eller en matematisk forklaring på brugen af de forskellige faciliteter, som et værktøjsprogram tilbyder.

4. FIGURER

I besvarelsen skal der indgå en hensigtsmæssig brug af figurer og illustrationer, og der skal være en tydelig sammenhæng mellem tekst og figurer.

5. KONKLUSION

Besvarelsen skal indeholde en afrunding af de forskellige spørgsmål med præcise konklusioner, præsenteret i et klart sprog og/eller med brug af almindelig matematisk notation.

Delprøve 1

Kl. 09.00 – 11.00

Opgave 1 a) Reducer $(a+b)^2 - 2(a+b)(a-b)$.**Opgave 2** Tre elever har løst ligningen $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$, og de har fået tre forskellige svar:*Elev A* : $x = 3$ eller $x = 1$ *Elev B* : $x = -3$ eller $x = 0$ eller $x = 1$ *Elev C* : Ligningen har ingen løsning

a) Gør rede for, hvilke to af de tre svar, der er forkerte.

Opgave 3 I en plan er givet tre punkter $A(4,1)$, $B(2,9)$ og $C(7,8)$.a) Bestem sidelængderne i trekant ABC .b) Undersøg om trekant ABC er retvinklet.**Opgave 4** En funktion f er givet ved

$$f(x) = 5e^{3x} \cdot x^2.$$

a) Bestem $f'(x)$.b) Bestem tallet $f'(1)$, og forklar, hvad dette tal fortæller om grafen for f .**Opgave 5** Der givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

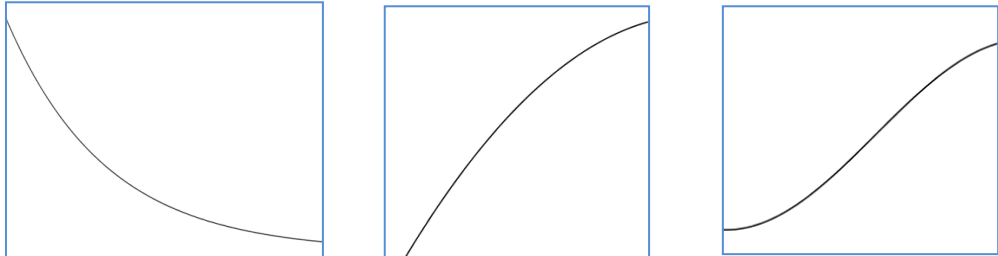
a) Bestem \vec{a}_b .

Opgave 6 En differentiaalligning er givet ved

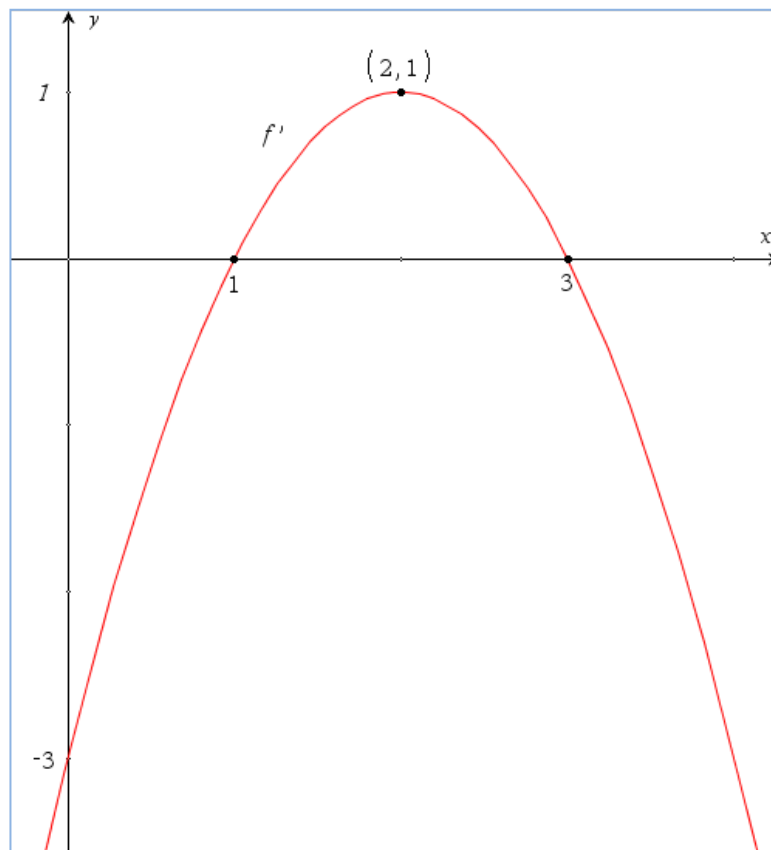
$$\frac{dN}{dt} = k \times N,$$

hvor k er en konstant, og N er en løsning til differentiaalligningen.

a) Begrund, hvilke to af nedenstående tre grafer der *ikke* kan være graf for N .



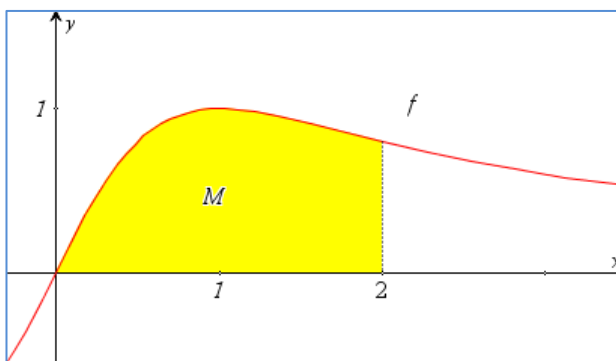
Opgave 7 På figuren ses grafen for f' . Det oplyses, at f' er et andengradspolynomium.



- Bestem monotoniforholdene for f .
- Gør rede for, at $f'(x) = -x^2 + 4x - 3$.

Opgave 8En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

a) Bestem en stamfunktion til f .Grafen for f afgrænser i intervallet $[0;2]$ et område M (se figur), der har et areal.b) Gør rede for, at arealet af M er $\ln(5)$.**Besvarelsen afleveres kl. 11.00**

Delprøve 2

Kl. 09.00 - 14.00

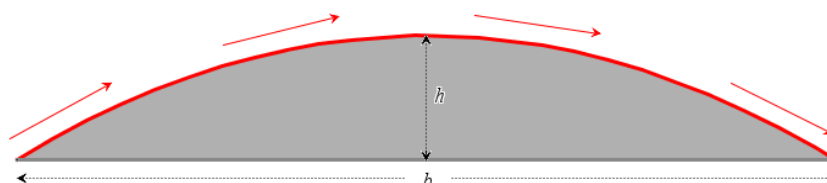
- Opgave 9** Ifølge en rapport fra Europa er udbredelsen af mobilt bredbånd i Danmark steget med 170 % fra 2008 til 2009. I 2008 var der 561869 aktive mobile bredbånd i Danmark.
- Opstil en model, der beskriver udbredelsen af aktive mobile bredbånd i Danmark som funktion af antal år efter 2008, idet det antages at udviklingen fortsætter. Illustrer modellen grafisk for perioden 2008-2018.
 - Benyt modellen til at bestemme antallet af aktive mobile bredbånd i Danmark i juli 2010, og bestem fordoblingstiden.

- Opgave 10** En plan α har ligningen $x + y + z = 1$.
- Bestem afstanden fra punktet $P(1, -1, 5)$ til planen α .

En anden plan β har ligningen $2x - 3y + 5z = 0$.

- Bestem den spidse vinkel mellem α og β .

- Opgave 11** På en trafikeret vej i den indre by skal der anlægges vejbump, som skal nedsætte hastigheden for tunge køretøjer til 30 km/t. Man ønsker, at anvende nogle præfabrikerede massive gummibump. På figuren ses tværsnittet af et af disse bump, hvor pilene på figuren angiver køretøjernes køreretning henover bumpet. Bumpets øvre kant (markeret med rødt) har form som en parabel.

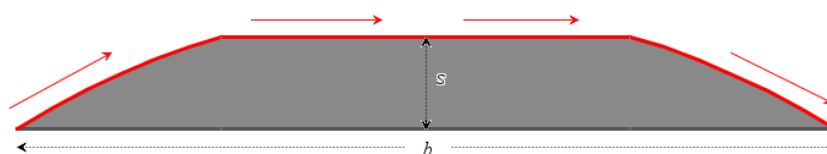


Bumpets bredde b er 80 cm, og bumpets maksimale højde h er 12 cm.

- Indlæg bumpet i et koordinatsystem, og bestem en forskrift for parabelbuen, der beskriver bumpets øvre kant.
- Bestem længden af bumpets øvre kant, idet længden af grafen for en differentiabel funktion f fra punktet $(a, f(a))$ til punktet $(b, f(b))$ er bestemt ved

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Et andet sted ønsker man at anvende en anden type bump som fremstilles ved, at man skærer toppen af de præfabrikerede bump, således at de får en 40 cm bred vandret flade midt på, så formen bliver som vist på figuren.



- Bestem højden s samt tværsnitsarealet af dette bump.

Opgave 12 Den italienske matematiker Vincenzo Viviani (1622—1703) har fået følgende sætning opkaldt efter sig:

Et punkt P placeres i det indre af en vilkårlig ligesidet trekant ABC . Da er summen af afstandene fra P til hver af trekantens sider lig med højden i den ligesidede trekant.

- Tegn en figur og indfør passende sæt symboler på figuren. Formuler Vivianis sætning ved brug af de anvendte symboler.
- Udtryk arealet af trekanten på to forskellige måder, og bevis herved Vivianis sætning.

Opgave 13 I et biologiforsøg har nogle elever målt udviklingen af colibakterier i en næringsvæske. Forsøget er lavet ved at sende en lysstråle igennem en næringsvæske og måle, hvor meget lys der absorberes. Absorptionen af lys er proportional med antallet af bakterier i væsken. Nedenstående tabel viser et uddrag af tabellen i vedlagte bilag, som indeholder alle måleresultater fra forsøget.

Tiden målt i timer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Antal bakterier	5	6	7	9	11	13	16	19	23	27

- Bestem ved brug af måleresultaterne fra forsøget en model, der med god tilnærmelse beskriver udviklingen i antallet af bakterier som funktion af tiden målt i timer. Illustrér udviklingen grafisk, og bestem den øvre grænse for antallet af bakterier i næringsvæsken.
- Bestem en differentialligning, som den ovenstående model er en løsning til.

Opgave 14 I en spørgeskemaundersøgelse stilles en repræsentativ stikprøve på 75 gymnasieelever to spørgsmål, spørgsmål A og spørgsmål B, hvortil de svarer enten JA eller NEJ. Der deltager 24 drenge i undersøgelsen, hvoraf de 10 svarer JA til spørgsmål A. I alt er der 24 gymnasieelever, der svarer JA til spørgsmål A.

- Undersøg med en χ^2 -test om der på signifikansniveauet 5% er belæg for at antage, at holdningen til spørgsmål A er uafhængig af gymnasieelevens køn. Undersøgelsen skal inddrage χ^2 -værdien og p -værdien.
- Hvor stor skal χ^2 -værdien være i den tilsvarende undersøgelse af spørgsmål B, hvis man på signifikansniveauet 5% skal kunne forkaste nulhypotesen om, at holdningen til spørgsmål B er uafhængig af gymnasieelevens køn?