Pythagoras

matematikhistorie og dynamisk geometri med TI-Nspire

Indholdsfortegnelse

Øvelse 1: Hvem var Pythagoras? 2

Pythagoras læresætning 2

Geometrisk konstruktion af Pythagoræisk tripel 3

Øvelse 2: En familie af Pythagoræiske tripler 5

Øvelse 3: Dine første familier af Pythagoræiske tripler 6

Øvelse 4: Uendelig mange Pythagoræiske familier 7

Øvelse 5: En "rummelig" Pythagoræisk familie 9

Øvelse 6: Pythagoras i vilkårlige retvinklede trekanter 10

Øvelse 7: Beviser for Pythagoras læresætning 12

- Geometrisk bevis for Pythagoras læresætning 12
- Algebraisk bevis for Pythagoras læresætning 13
- Euclids bevis for Pythagoras læresætning 14

Øvelse 8: Klip et algebraisk bevis for Pythagoras læresætning 15

Øvelse 9: Inkommensurable størrelser 16

Øvelse 10: Den omvendte Pythagoræiske sætning 17

Øvelse 11: Pythagoras hjælp til tømrerne 17

Det er målet at eleverne som resultat af forløbet skal kunne håndtere formler, kunne oversætter mellem symbolholdig og naturligt sprog, opstille geometriske modeller, redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser, demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske og kulturelle udvikling samt anvende it-værktøjer.

Materialet knytter sig til det supplerende stof som et sammenhængende matematik-historisk emne. Det er ambitionen at eleverne som resultat af forløbet skal opnå en viden om Euclids rekonstruktion af matematikken på et geometrisk grundlag samt den aksiomatisk deduktive bevisføring.

Som overfagligt mål skal eleverne lære notatteknik idet eleverne løbende med egne ord skal dokumentere deres svar og løsninger til øvelserne i materialet.

Eleverne vil arbejde eksperimentelt og lære at lave dynamiske geometriske konstruktioner. Det er ambitionen at eleverne gennem forskellige repræsentationsformer opnår større forståelse for emnet. Materialet giver desuden mulighed for undervisningsdifferentiering og vil kunne anvendes til alle niveauer C-A.

Nogle af øvelserne forudsætter udarbejdelse af tns-filer, der skal stilles til rådighed for eleverne.

Øvelse 1: Hvem var Pythagoras?

Du skal på Internettet finde ud af hvem Pythagoras var. Du skal i din undersøgelse komme ind på følgende:

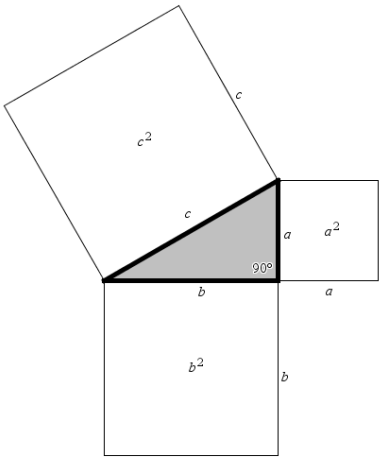
- Hvor og hvornår
- Det Pythagoræiske *religiøse* broderskab og livsfilosofi
- Pythagoras læresætning

Skriv dine svar her idet du også skal angive hjemmesidens webadresse:

Pythagoras læresætning

Allerede i folkeskolen stifter vi bekendtskab med Pythagoras læresætning:

I en retvinklet trekant er summen af kvadratet på kateterne lig kvadratet på hypotenusen:



Den moderne notation kan vi udtrykke Pythagoras læresætning ved ligningen $a^2 + b^2 = c^2$. Denne ligning kender vi allerede fra folkeskolen!?

Det er dog helt bevidst her at skrive sætningen "*geometrisk*" uden brug af bogstaver. Vi skal helt frem til Leonhard Euler (1707-1783) før det blev almindeligt at udtrykke ligninger med bogstaver. Sætningen siger altså at hvis vi har givet en retvinklet trekant vil summen af arealerne "*på*" kateterne svare til arealet "*på*" hypotenusen.

Fagligt mål:

Eleverne skal kunne redegøre for den græske matematiks udvikling i samspil med den historiske og kulturelle udvikling.

Udbytte:

Eleverne lærer at angive kilder samt at være kildekritiske i forhold til anvendelse af Internetsider.

Eleverne bidrager til en fælles forståelse af den historiske kontekst.

Taksonomisk bevæger eleverne sig mellem det redegørende og analytiske niveau (BLOOM).

Didaktiske overvejelser:

Ved en opsamling på klassen vil eleverne givet vis komme med forskellige bud på hvornår Pythagoras levede.

Dette kan bruges til en diskussion af hvilke hjemmesider der er mest troværdige samt en diskussion af hvorledes man historisk tidsbestemmer hvornår bestemte personer levede.

Personer kan i kilder være nævnt sammen med andre personer som man har kendskab til hvornår levede. F.eks. refererer Archimedes til Euclids elementer hvorfor man ved at Archimedes må have levet efter eller samtidigt med Euclid.

Astronomiske fænomener anvendes ligeledes til at tidsbestemme perioder. En bestemt solformørkelse nævnt i en kilde gør det muligt at tidsbestemme begivenheden hvis stedet er kendt.

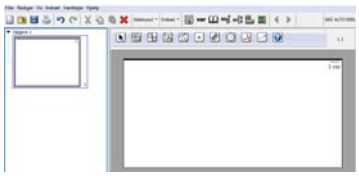
Geometrisk konstruktion af Pythagoræisk tripel

Tallene 3, 4 og 5 udgør sammen et af triplerne, der var særlig interessante for Pythagoræerne idet de som heltal tilfredsstillede Pythagoras læresætning. Det er let at vise at $(3,4,5)$ triplen tilfredsstiller ligningen: $a^2 + b^2 = c^2$ idet:

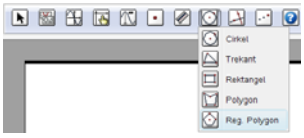
$$\mathbf{3^2} + \mathbf{4^2} = 9 + 16 = 25 = \mathbf{5^2}$$

Men lad os skrue tiden tilbage til Pythagoras tid og lave en geometrisk konstruktion der beskriver relationen af triplerne 3, 4 og 5 i en retvinklet trekant. Bemærk at dette ikke er en konstruktion som Pythagoræerne ville benytte sig af til at bestemme tripler!

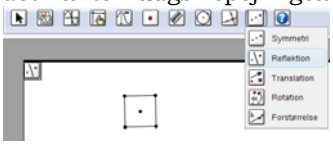
Åben en geometriapplikation i TI-Nspire idet du vælger **Plangeometrisk Visning**. Kontroller under **dokumentindstillinger** i **Filer**-menuen at vikler måles i grader.

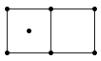


Vi vil nu gerne konstruere en kvadrat som er et de fem regulære polygoner. Vælg menupunktet **Reg. Polygon** i **Former**-menuen. Klik en gang i tegnefladen for at markere centrum for kvadratet, klik et nyt sted for at markere et hjørne for kvadratet, før musen i negativ omløbsretning (med uret) omkring centrumet for at bestemme typen af polygon og klik når der står { **4** } for at konstruere et "enheds"-kvadrat:

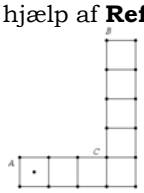


Grib i fat centrum for kvadratet for at ændre størrelse og rotation i tegnefladen. Vælg menupunktet **Refleksion** fra **Transformations** menuen, klik to gange på en af kanterne af enhedskvadratet for at spejle det oprindelige enhedskvadrat en gang idet kanten udgør spejlingsaksen:



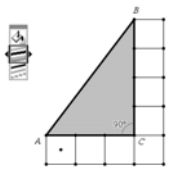


Lav nedenstående konstrution ved hjælp af **Refleksion**-værktøjet:



Konstruér herefter trekant *ABC* som vist herunder med **Trekant**-værktøjet og kontrolér at vinkel *ACB* er ret. Du kan højre-klikke på trekanten for at ændre udseendet af trekanten idet du vælger **Attributter**.

Brug piletasterne på computerens tastatur for at "farvelægge" trekanten og ændre at tykkelsen af trekantens rand:



Udmål vinkel *CAB* med **Vinkel**-værktøjet. Vælg **Rotation**-værktøjet, klik på den

Fagligt mål:

Gennem øvelsen demonstreres opstilling af en geometrisk model til beskrivelse af Pythagoræiske tripler.

Forudsætning:

Øvelsen kræver ikke nogen særlige forudsætninger idet øvelsen er instruktiv. Eleverne skal konstruere de viste figurer.

Udbytte:

Som resultat af øvelsen skal eleverne opnå en **geometrisk** begrebsafklaring i forhold til udtrykket "*kvadratet på*".

Den simple geometriske konstruktion som eleverne laver i denne øvelse danner grundlag for elevernes egne konstruktioner i de følgende øvelser.

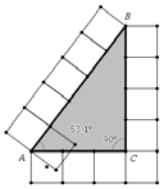
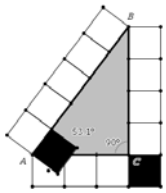
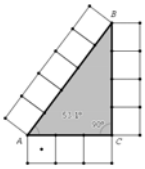
Taksonomisk opererer eleverne i denne øvelse på det enkelt-strukturelle niveau (SOLO).

Didaktiske overvejelser:

Det kan være hensigtsmæssigt at lave en opsamling af øvelsen på klassen for at sammenfatte resultatet af konstruktionen.

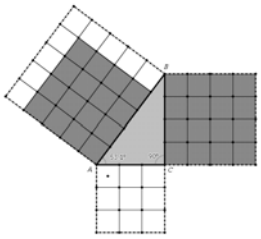
udmålte vinkel (53.1°), det første konstruerede kvadrat ved punkt A og til sidst punkt A:

Brug herefter **Refleksion**-værktøjet til at konstruere enhedskvadraterne langs trekantens hypotenuse. Skjul nu de to enhedskvadrater, der nedenfor i midten er markeret med sort ved at højreklikke på kvadraterne og vælge **Vis/Skjul**:

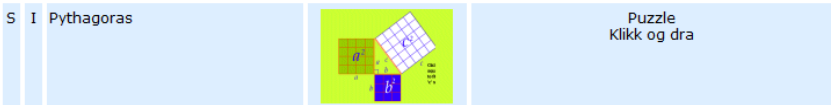
Vores retvinklede trekant ABC er nu omsluttet af enhedkvadrater langs randen. Vi ser at kateten b "måler" 3 enheder udmålt ved hjælp af antallet af enhedskvadrater langs kateten. Tilsvarende er $a = 4$ og $c = 5$.

Vi færdiggør nu vores konstruktion ved at bestemme arealet af kvadraterne på kateterne og hypotenusen idet vi bruger **Refleksion**-værktøjet til at spejle enhedskvadraterne:



Vi ser at arealet af kvadratet på kateten b udgør 9 enhedskvadrater, arealet på kateten a udgør 16 enhedskvadrater og kvadratet på hypotenusen c udgør 25 enhedskvadrater. Vi har nu lavet en konstruktion der (tilsyneladende!) viser en en-til-en korrespondance mellem enhedskvadrater på hypotenusen og enhedskvadraterne på begge kateter. Altså svarer arealet af kvadratet på hypotenusen til summen af arealerne af kvadraterne på kateterne da $25 = 9 + 16$:

Besøg http://home.hia.no/~cornelib/animasjon/matematikk/digivitalis/geometri.htm og prøv animationen der er vist herunder:



Øvelse 2: En familie af Pythagoræiske tripler

Vi har ovenfor set at $(3,4,5)$ er en Pythagoræisk tripel.
Det er let at udvide antallet af Pythagoræiske tripler ved at gange triplerne op med et vilkårligt naturligt tal. Altså vil $(2\cdot 3, 2\cdot 4, 2\cdot 5) = (6,8,10)$ også være en Pythagoræisk tripel!

- Vis geometrisk ved hjælp af ligedannethed at $(6,8,10)$ er en Pythagoræisk tripel når du ved at $(3,4,5)$ er det?
- Vis ovenstående med moderne notation (algebraisk) ved hjælp af ligningen $a^2 + b^2 = c^2$? **Vink**: Gang igennem med 4 i ligningen.
- Kan du argumenter for at der må er uendeligt mange Pythagoræiske tripler?

Skriv dine svar her:

Ovenfor så du hvorledes triplen $(3,4,5)$ affødte uendelig mange tripler. I overført betydning blev $(3,4,5)$ *"forældre"* til $(6,8,10)$, $(9,12,15)$ osv. Forældrene $(3,4,5)$ har ikke selv nogen forældre da de ikke er *"født"* af nogen tripler. Vi kalder tallene primiske da der ikke findes noget fælles tal der går op i alle tallene ud over 1. Derimod er $(6,8,10)$ et *barn* af $(3,4,5)$ da 2 går op i alle tallene $(2\cdot 3, 2\cdot$ *4, 2·5=6, 8, 10*.

Fagligt mål:

Eleverne skal demonstrere matematiske ræsonnement ved løsning af øvelsen.

Forudsætning:

Eleverne skal have kendskab til egenskaber for ligedannede figurer for at løse første opgave i øvelsen.

Udbytte:

Det andet spørgsmål appellerer til en formel løsning af opgaven der lægger op til undervisningsdifferentiering.

Taksonomisk opererer eleverne i denne øvelse mellem det mulitistrukturelle niveau og det relationelle niveau (SOLO).

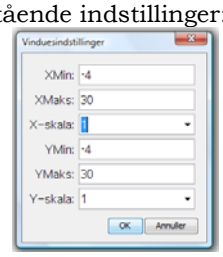
Didaktiske overvejelser:

Som indledning til øvelsen kan det være hensigtsmæssigt at sikre en fælles forståelse for hvad "*forældre*" og "*familier*" dækker over.

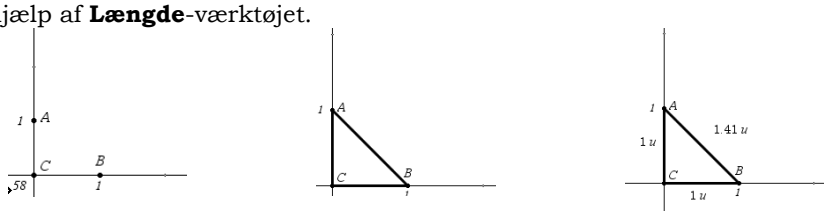
Øvelse 3: Dine første familier af Pythagoræiske tripler

Du skal i denne øvelse arbejde eksperimentelt for at finde andre tripel der som $(3,4,5)$ er uforkortlig og som kan være "*forældre*" til en ny "familie" af tripler. Altså skal du finde Pythagoræisk tripler, som ikke har en fælles divisor der går op i de tre tal.

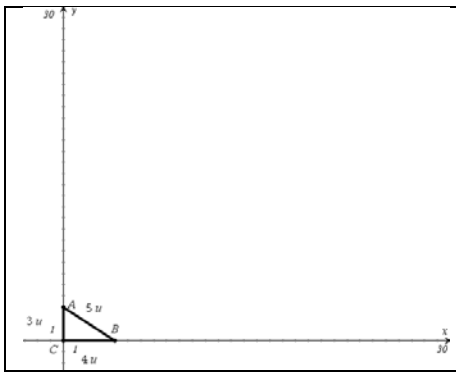
Du får lidt hjælp til at finde nogle tripler ved at lave nedenstående konstruktion. Åben en Graf-applikation i TI-Nspire og træk begyndelsespunktet (0,0) for x og y aksen til nederste venstre hjørne. Højreklik i grafrummet, vælg **Vinduesindstillinger** under **Zoom** og vælg nedenstående indstillinger:



Vi kan nu anvende skala markeringerne på x og y aksen til at lave retvinklede trekanter hvor længden af kateterne er hele positive tal. Afsæt punkt ***A*** på y-aksen i punkt (0,1), punkt ***B*** på x-aksen i punkt (1,0) og punkt ***C*** i origo med koordinatsættet (0,0). Konstruer herefter trekant ***ABC*** med **Trekant**-værktøjet. Afmål længden af kateterne og hypotenusen som afstand mellem punkter ved hjælp af **Længde**-værktøjet.



Den konstruerede trekant hører tydeligvis ikke blandt Pythagoras tripler idet hypotenusen er et decimaltal. Træk i hhv. punkt A og B for at konstruere den Pythagoræiske triple $(3,4,5)$:



Det oplyses at der i det angivne x og y akseinterval befinder sig fire familier.

Træk i punkterne ***A*** og ***B*** for at finde de tre nye forældre til Pythagoræiske familier ud over $(3,4,5)$.

Angiv dine tre nye forældre tripler her:

Fagligt mål:

Gennem øvelsen demonstreres opstilling af en geometrisk model og løsning af et geometrisk problem samt analytisk beskrivelse af Pythagoræiske tripler som geometrisk figur i et koordinatsystem.

Forudsætning:

Øvelsen kræver ikke nogen særlige forudsætninger idet øvelsen er instruktiv. Eleverne skal konstruere de viste figurer.

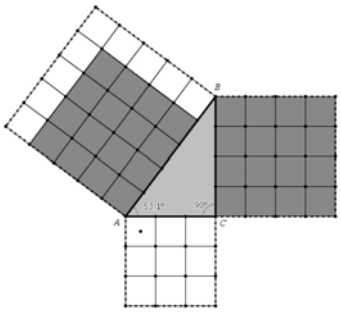
Taksonomisk opererer eleverne i denne øvelse på det enkelt-strukturelle niveau (SOLO).

Udbytte:

Gennem elevernes eksperimentelle arbejde vil eleverne kunne lære princippet der knytter sig til variabelkontrol – at holde den ene variabel fast mens den anden ændres. Dermed sikres en udtømmende metode til bestemmelse af søgte tripler.

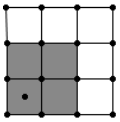
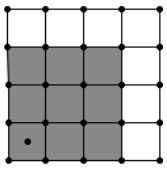
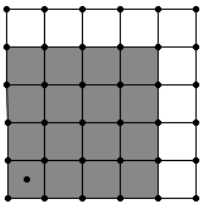
Øvelse 4: Uendelig mange Pythagoræiske familier

I denne øvelse skal vi vise at der må være uendelig mange Pythagoræiske familier. Lad os starte med at tage udgangspunktet følgende figur som vi konstruerede tidligere:



Figuren illustrerer den Pythagoræiske triple (3, 4, 5). Vi bemærker at længden af den længste katete er "nabotal" til længden af hypotenusen. Altså at forskellen er lig $5 - 4 = 1$. Vi bemærker desuden at forskellen i antal af enhedskvadrater mellem kvadratet på hypotenusen og kvadratet på kateten med længde 4 er 9 enhedskvadrater, svarende til antallet af de hvide enhedskvadrater i kvadratet på hypotenusen. Men forskellen er netop et kvadrattal da $c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9 = 3^2 = b^2$. Dette giver den Pythagoræiske triple.

Vi fokuserer altså udelukkende på de retvinklede trekanter hvor den ene katete er en enhed kortere end hypotenusen. Disse trekanter kan illustreres ved at betragte kvadraterne på hypotenusen:

Hypotenuse: $c = 2$ Katete: $a = 1$	 Hypotenuse: $c = 3$ Katete: $a = 2$	 Hypotenuse: $c = 4$ Katete: $a = 3$	 Hypotenuse: $c = 5$ Katete: $a = 4$
Forskellen i antallet af enhedskvadrater er 3 som ikke er et kvadrattal. Altså giver dette ikke en Pythagoræisk triple da kvadratroden af 3 er et decimaltal: $b^2 = c^2 - a^2 = 2^2 - 1^2 = 3$ $b = \sqrt{3} \approx 1.73$	Forskellen i antallet af enhedskvadrater er 5 som ikke er et kvadrattal. Altså giver dette ikke en Pythagoræisk triple da kvadratroden af 5 er et decimaltal: $b^2 = c^2 - a^2 = 3^2 - 2^2 = 5$ $b = \sqrt{5} \approx 2.24$	Forskellen i antallet af enhedskvadrater er 7 som ikke er et kvadrattal. Altså giver dette ikke en Pythagoræisk triple da kvadratroden af 7 er et decimaltal: $b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 3^2 = 7$ $b = \sqrt{7} \approx 2.65$	Forskellen i antallet af enhedskvadrater er 9 som **er** et kvadrattal. Dette giver os vores kendte Pythagoræiske triple (3, 4, 5) da kvadratroden af 9 er et helt tal: $b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$ $b = \sqrt{9} = 3$

Argumenter for som ovenfor at næste Pythagoræiske familie må være (5, 12, 13).

Tegn skitse figur her:

Hypotenuse: $c = 13$
Katete: $a = 12$

Fagligt mål:

Eleverne skal demonstrere matematiske ræsonnement ved løsning af øvelsen.

Forudsætning:

Eleverne skal kende til ligningsløsning og kvadratet på en toleddet størrelse.

Udbytte:

Anden del af øvelsen er en formel tilgang der lægger op til undervisningsdifferentiering.

Taksonomisk opererer eleverne i denne øvelse mellem det enkelt-strukturelle niveau og det udvidede abstrakte niveau (SOLO).

Didaktiske overvejelser:

Som indledning til øvelsen kan det være hensigtsmæssigt at sikre en fælles forståelse for hvad "*nabotal*" dækker over samt en forklaring af illustrationerne.

Vi har nu bestemt de to familier med forældrene $(3,4,5)$ og $(5,12,13)$. Betragter vi de to forældre ser vi at de første tal der indgår i familierne er de ulige tal 3 og 5. De følgende tal i triplerne er naboer: hhv. 4 og 5 samt 12 og 13.

Vi kan ud fra kvadratfigurerne argumentere for at vi kan finde den næste familie ved at tage udgangspunkt i kateten $b = 7$ som giver en forskel i antallet af kvadrater på $b^2 = 7^2 = 49$. Vi kan ud fra denne bestemme nabotallene $a = n$ og $c = n + 1$ ved at opstille følgende ligning, der løses trinvis:

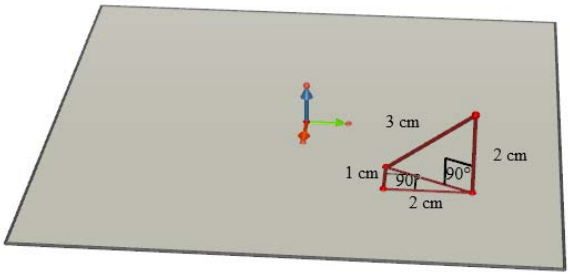
$c^2 - a^2 = b^2$ $(n+1)^2 - (n)^2 = 7^2$ $n^2 + 2n + 1 - n^2 = 49$ $2n + 1 = 49$ $n = 24$	**Forklar den trinvise løsning af ligningen til venstre:**
Forklar ud fra ovenstående at vi har bestemt forældreparret $(7, 24, 25)$:	

Bestem næste forældrepar og argumenter for at der findes uendelig mange Pythagoræiske familier.

Skriv dine svar her:

Øvelse 5: En "rummelig" Pythagoræisk familie

Tallene (1, 2, 2, 3) udgør det man på engelsk kalder "*Pythagorean quadruple*". Undersøg ved hjælp af Internettet (Wikipedia) hvad begrebet dækker over. Giv en geometrisk forklaring med udgangspunkt i nedenstående 3-dimensionelle illustration (lavet med matematikprogrammet Cabri 3D):



Skriv dine svar her:

Formulér Pythagoras læresætning i rummet med moderne notation:

Skriv dit bud her:

Kan du bruge analogien fra 2 til 3 dimensioner til at sige noget om Pythagoras læresætning i 4 dimensioner? Hvad med 5 dimensioner… og n dimensioner?

Skriv her:

Fagligt mål:

Opstilling af en geometrisk model til løsning af et algebraisk/geometrisk problem.

Udbytte:

Øvelsen kan passende bruges som perspektivering til eksamensspørgsmål om Pythagoras lærersætning.

Taksonomisk opererer eleverne i denne øvelse mellem det mulitistrukturelle niveau og det udvidede abstrakte niveau (SOLO).

Didaktiske overvejelser:

Som indledning til øvelsen kan det være hensigtsmæssigt at vise og forklare den 3-dimensionelle figur og sammenhæng med tallene (1, 2, 2, 3).

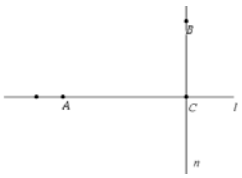
Figuren konstrueres let i Cabri 3D hvor figuren kan roteres og placeres således at de to retvinklede trekanter kan "isoleres" hver for sig set hhv. oppefra og vinkelret på opretstående trekant.

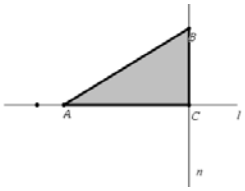
Problemstillingen kan også forklares ved foldning af 2 dimensional figur.

Øvelse 6: Pythagoras i vilkårlige retvinklede trekanter

Vi har indtil nu kun set på nogle særlige retvinklede trekanter nemlig dem hvor kateterne og hypotenusen er naturlige tal. Vi vil nu lave en geometrisk konstruktion der i vilkårlige retvinklede trekanter illustrerer at arealerne på kateterne svarer til arealet på hypotenusen. Dele af konstruktionen er vist herunder idet øvelsen er at færdiggøre konstruktionen.

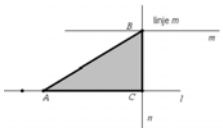
I en geometriapplikation starter du med at konstruere en linje l med **Linje**-værktøjet. Konstruer herefter en vinkelret linje n til l i punkt C. Afsæt et vilkårligt punkt A på l og B på n. Konstruer trekant ABC:

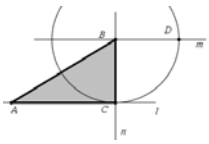


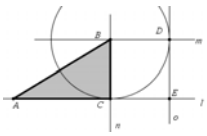


Trekant ABC repræsenterer nu en vilkårlig retvinklet trekant. Vi vil nu konstruere de kvadrater "der ligger på" kateterne og hypotenusen. Dette gør vi ved hjælp af **Parallel**-værktøjet for at lave sider, **Cirkel**-værktøjet der sikrer os at siderne i kvadratet er lige lange og **Polygon**-værktøjet til at lave kvadratet.

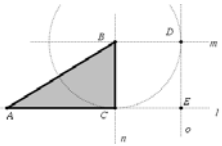
Her vises hvorledes vi konstruerer kvadratet på kateten a. Konstruér den parallelle linje til l gennem B ved at vælge **Parallel**-værktøjet klikke på l og klikke på punkt B hvilket giver linje m. Vælg herefter **Cirkel**-værktøjet og konstruer cirklen med centrum i B og radius BC ved at klikke på punkt B efterfulgt af punkt C. Konstruer skæringen mellem cirklen og linje m hvilket giver punkt D. Konstruer den parallelle linje til n gennem D hvilket giver linje o. Konstruer skæringen mellem linje o og linje l hvilket giver punkt E:

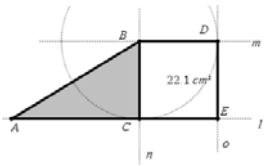




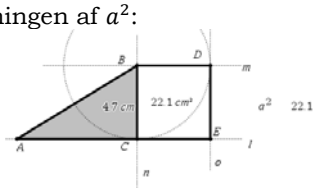


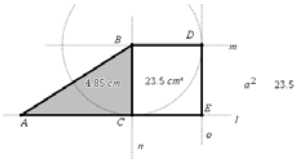
Du kan nu ændre udseendet at de hjælpelinjer som vi har anvendt til at konstruere kvadratet $BCDE$ ved at højre-klikke på dem og vælge Attributter. Herunder er hjælpelinjer gjort stiplede. Vælg **Polygon**-værktøjet og klik på punkterne B, C, D, E og B for at konstruere kvadratet. Vælg **Areal**-værktøjet for at måle arealet af kvadratet:





Mål desuden afstanden mellem punkterne B og C for at bestemme længden af kateten a. Højre-klik et sted i tegnefladen, vælg **Tekst** og skriv a^2 idet du kan bruge tastaturtasten **^** for at opløfte a i anden potens. Højre-klik nu på teksten a^2, vælg **Beregn** og udpeg målingen af a. Træk i punktet B – der skulle gerne være overensstemmelse mellem udmålingen af arealet af kvadratet og udregningen af a^2:





Fagligt mål:

Gennem øvelsen demonstreres opstilling af en geometrisk model til beskrivelse af Pythagoras læresætning.

Forudsætning:

Øvelsen kræver ikke nogen særlige forudsætninger idet øvelsen er instruktiv. Eleverne skal konstruere de viste figur.

Udbytte:

Eleverne opnår kendskab til "Euklidisk" konstruktion af geometriske af kvadrater med passer og lineal.

Som resultat af øvelsen skal eleverne opnå en **geometrisk** forståelse af Pythagoras læresætning.

Konstruktion er dynamisk hvilket forstærker den geometriske forståelse.

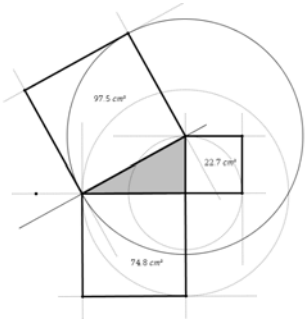
Taksonomisk opererer eleverne i denne øvelse på det mulitistrukturelle niveau (SOLO).

Didaktiske overvejelser:

Det kan være hensigtsmæssigt at lave en opsamling af øvelsen på klassen for at sammenligne resultatet af konstruktionen med konstruktionen i øvelse 2.

Du skal nu selv færdiggøre konstruktionen idet du skal konstruere kvadraterne på katete *b* og hypotenusen *c* idet du for brug for at anvende **Vinkelret**-værktøjet undervejs. Vis ved udregning at summen af arealerne af kvadraterne på kateterne er lig arealet af kvadratet på hypotenusen:

A1+A2 97.5



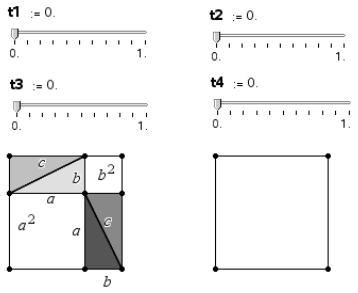
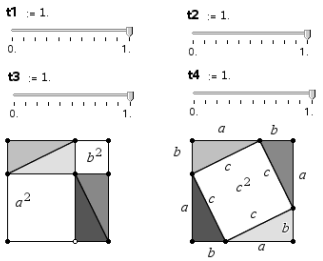
Øvelse 7: Beviser for Pythagoras læresætning

Du skulle nu gerne være overbevist om at Pythagoras læresætning er sand. Men du har lov til at være i tvivl og stille spørgsmål – for eksempler er ikke nok idet enhver matematisk påstand forudsætter et bevis før at vi accepterer den for at være gældende.

Vi vil i denne øvelse se på forskellige beviser for Pythagoras læresætning. Der er både geometriske og algebraiske beviser idet vi starter med det mest simple bevis.

Geometrisk bevis for Pythagoras læresætning

Åben den udleverede fil med det geometriske bevis for Pythagoras. Træk i skyderne *t1*, *t2*, *t3* og *t4*. Beskriv med egne ord hvad der sker når man trækker i skyderne og forklar det geometriske bevis for Pythagoras:

	**Forklar med dine egne ord:**
	**Forklar med dine egne ord:**

Fagligt mål:

Eleverne skal demonstrere matematiske ræsonnement ved det geometriske bevis for Pythagoras læresætning.

Forudsætning:

Øvelsen forudsætter en af læreren udarbejdet dynamisk figur til støtte for det geometriske bevis. Figuren konstrueres ved hjælp af forskydning af trekanter langs vektorer samt anvendelse af skydere.

Udbytte:

Den dynamiske konstruktion forstærker forståelsen af sammenhængen mellem de to figurer og udledning af beviset for Pythagoras.

Taksonomisk opererer eleverne i denne øvelse mellem det mulitistrukturelle niveau og det udvidede abstrakte niveau (SOLO).

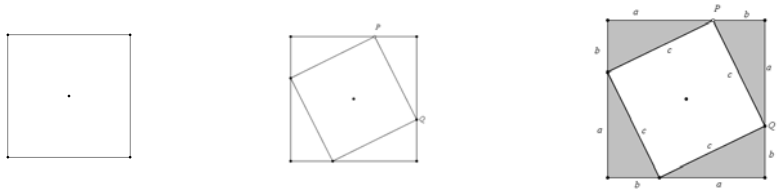
Didaktiske overvejelser:

Som indledning til øvelsen kan det være relevant at diskutere behovet for at bevise Pythagoras læresætning.

Flere elev vil givet vis mene at man allerede har "godt styr" på sætningen. Dette kan give anledning til diskussion af det induktive og deduktive princip.

Algebraisk bevis for Pythagoras læresætning

Konstruér et kvadrat med **Reg.polygon** værktøjet i en Geometriapplikation i TI-Nspire. Konstruér herefter et indskrevet kvadrat i det første kvadrat ved at klikke på centrum for det første kvadrat, på randen af det ydre kvadrat i P og i Q. Konstruer herefter de fire retvinklede trekanter med den rette vinkel i hjørnerne af det ydre kvadrat. Navngiv siderne i de fire retvinklede trekanter. Træk i punktet P for at tjekke din konstruktion.



Vi har som udgangspunkt givet et ydre kvadrat der har sidelængden $a + b$. Hvad er definitionen på et kvadrat?

Træk i punktet P langs det vandrette linjestykke på kvadratets "top". Bemærk at arealet af det store kvadrat ikke ændres når vi trækker i P.
Bestem arealet af kvadratet med sidelængden $a + b$:

$A1 =$

Bemærk at det store kvadrat er sammensat af fire retvinklede trekanter og et mindre kvadrat.

Bestem arealet af det store kvadrat som summen af arealet af de fire retvinklede trekanter og arealet af det lille kvadrat.

$A2 =$

Sæt A1 = A2 og reducér ligningen:

Skriv her:

Nu er det algebraiske bevis sådan set færdigt. Men der er et problem! Vi har under udregning af $A2$ gjort en antagelse som vi ikke har sagt noget om - hvilken? Argumenter for at vores antagelse var korrekt:

Skriv her:

På hjemmesiden http://frividen.dk/ kan du i mappen "MATEMATIK > Geometri" se en videooptagelse af ovenstående beviset.

Fagligt mål:

Eleverne skal demonstrere matematiske ræsonnement ved det algebraiske bevis for Pythagoras læresætning.

Forudsætning:

Øvelsen kræver ikke nogen særlige forudsætninger idet øvelsen er instruktiv. Eleverne skal konstruere den viste figur og følge anvisningen.

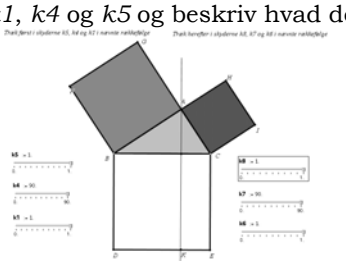
Udbytte:

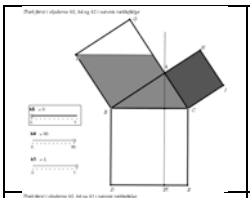
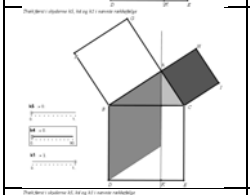
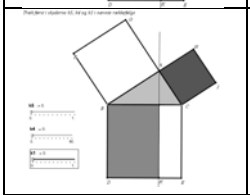
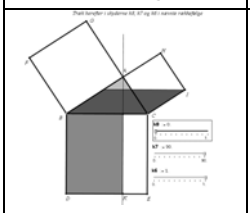
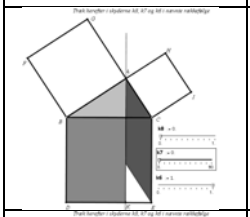
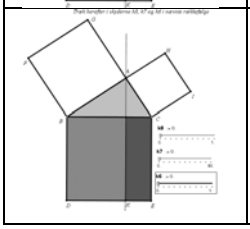
Den dynamiske konstruktion forstærker forståelsen af sammenhængen mellem de to figurer og udledning af beviset for Pythagoras.

Taksonomisk opererer eleverne i denne øvelse mellem det mulitistrukturelle niveau og det udvidede abstrakte niveau (SOLO).

Euclids bevis for Pythagoras læresætning

Åben den udleverede fil med Euclids bevis for Pythagoras. Træk først i skyderne *k6*, *k7* og *k8*. Beskriv med egne ord hvad der sker når man trækker i skyderne. Træk herefter i skyderne *k1*, *k4* og *k5* og beskriv hvad der sker:



	**Forklar med dine egne ord:**
	**Forklar med dine egne ord:**
	**Forklar med dine egne ord:**
	**Forklar med dine egne ord:**
	**Forklar med dine egne ord:**
	**Forklar med dine egne ord:**

Euclids bevis for Pythagoras læresætning stå som sætning 47 i 1. bog at Elementerne. Undervejs i beviset trækker Euclid på sætninger der er bevist tidligere og bruger aksiomer som bogen indleder med.

Undersøg hvem Euclid er og hvad Elementerne består af. Hvorledes er Pythagoras læresætning formuleret? Prøv om du kan finde bestemme hvilke aksiomer og sætninger Euclid benytter sig af i beviset for Pythagoras læresætning.

Fagligt mål:

Eleverne skal demonstrere matematiske ræsonnement ved Euclids bevis for Pythagoras læresætning.

Forudsætning:

Øvelsen forudsætter en af læreren udarbejdet dynamisk figur til støtte for Euclids bevis. Figuren konstrueres ved hjælp af forskydning af figurer langs vektorer, rotation samt anvendelse af skydere.

Udbytte:

Den dynamiske konstruktion forstærker forståelsen for udledningen af Euclids bevis for Pythagoras læresætning.

Taksonomisk opererer eleverne i denne øvelse mellem det mulitistrukturelle niveau og det udvidede abstrakte niveau (SOLO).

Didaktiske overvejelser:

Som opsamling på øvelsen kan beviset passende kobles med en gennemgang af Tyra Eibes oversættelse af Euclids bevis for Pythagoras læresætning.

Dette kan passende give anledning til en diskussion af aksiomatisk deduktion og bevisførelse.

Øvelse 8: Klip et algebraisk bevis for Pythagoras læresætning

Åben en **Geometri** applikation og skriv følgende tekstlinjer i tegnefladen:

$AREAL1=side \cdot side$

"De to måder at beregne arealet på skal føre til samme resultat."

$a^2+b^2=c^2$

"Anbring fire ens retvinklede trekanter, spids mod spids, så den ydre figur bliver et kvadrat."

$AREAL1=(a+b)\cdot(a+b)$

"Derfor er" $AREAL1 = AREAL2$.

$AREAL2=4\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot b+c\cdot c = 2\cdot a\cdot b+c^2$

"Arealet af det store kvadrat kan beregnes på to måder:"

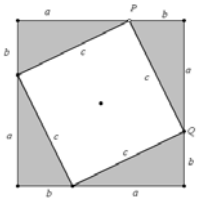
$AREAL1=a^2+b^2+a\cdot b+b\cdot a$

"Træk 2ab fra på begge sider"

$AREAL2$="fire ens trekanter + et kvadrat i midten"

$a^2+b^2+a\cdot b+b\cdot a = 2\cdot a\cdot b+c^2$

$AREAL1=a^2+b^2+2\cdot a\cdot b$



Du har sikkert bemærket tilfældigheden i rækkefølgen af linjerne. Der er nu din opgave at placere linjerne i den korrekte rækkefølge således at de udgør et algebraisk bevis for Pythagoras læresætning. Du kan trække i linjerne uafhængigt at hinanden.

Figuren til højre fungerer som hjælp til beviset.

På hjemmesiden http://frividen.dk/ kan du i mappen "MATEMATIK > Geometri" se en videooptagelse af beviset

Fagligt mål:

Eleverne skal demonstrere matematiske ræsonnement ved det algebraiske bevis for Pythagoras læresætning.

Forudsætning:

Øvelsen kræver ikke nogen særlige forudsætninger idet øvelsen er instruktiv. Eleverne skal konstruere den viste figur og følge anvisningen.

Udbytte:

Eleverne sammensætter det algebraiske bevis for Pythagoras læresætning af fragmenter. Beviset kan afslutningsvis gemmes.

Øvelsen kan passende fungere som repetition og fastholdelse af forståelsen af det algebraiske bevis for Pythagoras læresætning gennemgået tidligere.

Taksonomisk opererer eleverne i denne øvelse mellem det mulitistrukturelle niveau og det udvidede abstrakte niveau (SOLO).

Øvelse 9: Inkommensurable størrelser

Lav en tidslinje hvor du indplacerer følgende berømte oldgræske filosoffer og matematikere: Pythagoras, Sokrates, Platon, Aristoteles, Euclid og Archimedes.

Skriv her:

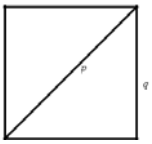
Vi skal i denne øvelse vise at $\sqrt{2}$ er en inkommensurabel størrelse. Da disse inkommensurable størrelser blev opdaget opstod der et behov for at rekonstruere matematikken på et geometrisk grundlag.

Undersøg via Internettet hvad der ligger i begrebet inkommensurable størrelser. Brug eventuelt søgeordene: Euclids Elementer og inkommensurable størrelser. Måske falder du over en lille anekdote om en uheldig græker, der beviste at $\sqrt{2}$ ikke er et rationel tal (altså at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk).

Skriv her og husk at angive webadresse:

Vi vil her med et *moderne* algebraisk modstridsbevis der viser at der findes inkommensurable størrelser (u-sammen-målelige).

Vi betragter et kvadrat, specielt siden og diagonalen i kvadratet. Vi antager at der findes et fælles mål, der går op i begge sider. Diagonalen giver vi længden p enheder og siden har længden q enheder. Altså er p og q hele tal. Vi antager at p og q er indbyrdes primiske således at forholdet p/q ikke kan forkortes. Hvis p og q havde en fælles divisor k, kunne vi vælge en enhed der var k gange større… altså er antagelsen ikke urimelig.



Fra Pythagoras læresætning (I.47) ved vi at $p^2 = 2 \cdot q^2$. Altså er p^2 et lige tal og derfor må p også være et lige tal (p kan ikke være ulige da kvadratet på et ulige tal er ulige). Da p og q er indbyrdes primiske, må q være et ulige tal.

Da p var et lige tal sætter vi p lig $2 \cdot r$. Ved udregning får vi at $2 \cdot q^2 = p^2 = 4 \cdot r^2$. Vi forkorter med 2 og ser at q må være et lige tal: $q^2 = 2 \cdot r^2$. Men q kan umuligt være både lig og ulige hvorfor vores antagelse om at der findes et fælles mål er forkert.

Vi har dermed bevist at der findes linjestykker der ikke kan måles med samme enhed. Det er af samme grund at Euclid ikke tillægger sine linjestykker længde (et tal) men arbejder med dem som det er: geometriske størrelser. Senere tiders matematikere omgik det samme problem ved at udvide talbegrebet med de "reelle" tal.

Hvorledes er $\sqrt{2}$ koblet til ovenstående bevis som inkommensurabel størrelse?

Skriv dit svar her:

Fagligt mål:

Eleverne skal kunne redegøre for den græske matematiks udvikling i samspil med den historiske og kulturelle udvikling.

Udbytte:

Taksonomisk bevæger eleverne sig mellem det redegørende og analytiske niveau (BLOOM).

Modstrid til bevisteknik.

Forståelse for behovet for rekonstruktion af matematikken på geometrisk grundlag med Euclids Elementer.

Didaktiske overvejelser:

Gennemgangen på klassen kan passende centreres omkring behovet for rekonstruktion af matematikken på geometrisk grundlag.

Øvelse 10: Den omvendte Pythagoræiske sætning

Hvis summen af kvadratet på de korte sider i en trekant er lig kvadratet på den længste side så er trekanten retvinklet.
Dermed svarer de korte sider til kateter og den lange side til hypotenusen.

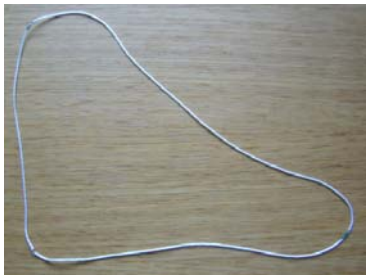
Forklar hvad der menes med "*omvendte*":

Fagligt mål:
Eleverne skal demonstrere matematiske ræsonnement og forståelse for matematisk påstand.

Udbytte:
Perspektivering af Pythagoras læresætning.

Øvelse 11: Pythagoras hjælp til tømrerne

Tag et stykke snor og lav en markering ved 3/12-dele og 7/12-dele af snorens længde. Bind snorens ender sammen således at forholdene bevares.



Du er nu i besiddelse af et "værktøj" der let kan bruges som vinkelmålingsinstrument til at sikre rette vinkler. Hvorfor og hvordan?

Skriv dit svar her:

Fagligt mål:
Eleverne skal demonstrere matematiske ræsonnement og forståelse for konsekvens og anvendelse af matematisk påstand.

Udbytte:
Diskussion af smart metode til inddeling af snor i angivne størrelser.

Foldes snoren i fire dele fås ¼ del af snoren længde fra den ene ende og foldes snoren i tre dele fås 1/3 del af snoren fra den anden ende. Dette giver den rette inddeling idet der skal tages højde for knuden.