Matematikkens elementære videnskabsteori

Forord

Nærværende artikelsamling er udarbejdet af en arbejdsgruppe nedsat under Matematiklærer-foreningen med støtte fra Undervisningsministeriet.

Forsvindende få elever vælger matematik, når de skal til eksamen i almen studieforberedelse. En medvirkende årsag til nedsættelsen af arbejdsgruppen har nok været en ministeriel mistanke om, at eleverne viger tilbage for faget, fordi de – og måske også i nogen grad deres lærere – føler sig usikre over for matematikkens videnskabsteori – og en forhåbning om, at gruppens arbejde kunne rette op på dette. Elevernes interesse for videnskabsteori vækkes i den daglige undervisning. Derfor indeholder artikelsamlingen ikke alene forslag til AT-relaterede forløb, men også ideer til at anlægge videnskabsteoretiske overvejelser over det daglige arbejde i klassen.

Gruppen har spændt vidt, og blandt sine medlemmer talt en matematikfilosof, en filosof, en teolog og en fagdidaktiker in spe. Fællesnævneren for gruppens medlemmer, som alle er praktiserende gymnasielærere udi faget, er en optagethed af de to spørgsmål

- Hvad er matematik?
- Hvordan gøres spørgsmålet vedkommende for elever og lærere?

Artikelsamlingen indeholder ***ikke*** en systematisk gennemgang af matematiks videnskabsteori. Hvis målsætningen om at få flere elever til at vælge matematik i forbindelse med AT skal indfries, er det vigtigtigere, at de spørgsmål, der diskuteres, knytter an til det matematikfag, eleverne kender, end at man kommer hele vejen rundt om emnet.

Artikelsamlingen henvender sig primært til lærere, men flere artikler indeholder kommenterede forslag til elevaktiviteter. Materialet er gjort tilgængelig på nettet, så læreren kan skære det til.

Artiklerne spænder fra jordnære anvisninger på, hvordan eleverne skal forholde sig til metoderedegørelsen i AT-synopsen, over debatindlæg via forslag til konkrete undervisningsforløb til fortolkning af Platons Timaios og et filosofisk blik på uendelighedsbegrebet. Fra det elementære til det højpandede. Fra det direkte anvendelige til stof, der maner til eftertanke. Vi håber, at der er noget for enhver smag.

For at man kan danne sig et indtryk og vælge ud, følger nu en kort skitse af indholdet, disponeret efter emnerne i den nye vejlednings afsnit om fagets identitet og metoder.

Matematisk tankegang rummer bl.a. nogle overvejelser over tallenes natur: de *er* ikke virkelighed, de *repræsenterer* virkelighed. Afsnittet går med andre ord ind i diskussionen om det kompleks, der kaldes matematikkens grundlag.

Terese Nielsens artikel **'Hvad er tal?'** anviser ideer til at inddrage denne diskussion konkret i den daglige undervisning: Tal, regning og kendskab til talmængder er en del af kernestoffet i matematik i gymnasiet. Matematikkens genstandsområde gør faget til et specielt fag, for det ligner ikke hverken natur-, human- eller samfundsvidenskabernes genstandsområde. Det vil man kunne vise eleverne ved at fokusere på spørgsmål om, hvad tal er og kan og ikke kan, og hvad forholdet mellem talsymboler (tegnet '9') og tal (tallet 9) er, i forbindelse med den almindelige undervisning. Artiklen indeholder forslag til filosofiske synsvinkler og øvelser med korte præsentationer af ideerne til læreren og øvelser til eleverne.

Jørgen Ebbesens artikel **'Rotter og indianere'** beskæftiger sig med samme spørgsmål på et lidt mere filosofisk plan. Artiklen behandler diskussionen, om tallene er menneskeskabte, eller de i en eller anden forstand findes uafhængigt at mennesket. Tilgangen til spørgsmålet er ufilosofisk og utraditionel. På den ene side har dyr tilsyneladende en slags talfornemmelse, hvilket taler for, at tallene eksisterer uafhængigt af mennesket. På den anden side tyder studier af en isoleret indianerstamme i Amazonas på, at det er umuligt at have et præcist talbegreb, hvis man taler et sprog uden talord. Artiklen forholder sig også til den daglige undervisning i den forstand, at den indeholder en lang række opgaver, der forsøger at levendegøre diskussionen om den matematiske realisme.

Karen Thorsens **genfortælling af skabelsesberetningen i Platons dialog Timaios** gengiver en matematisk skabelsesmyte, der fortæller om, hvorledes de naturlige tal er tænkt ind i hele universet som bærende struktur allerede fra skabelsen. Myten viser, hvilken tryghed den matematiske realisme har givet mennesket og giver anledning til at overveje, hvad det betyder, at vi skal undvære denne tryghed, - hvis vi altså skal. Artiklen kan danne oplæg til et AT-forløb i 3g, hvor matematik samarbejder med f.eks. oldtidskundskab eller filosofi. Der gives arbejdsspørgsmål til teksten samt en række forslag til videre arbejde.

Matematisk sprog omhandler symbolsproget.

Petur B. Petersens artikel **'Om brugen af matematiske tegn og objekter i en god matematisk fremstilling'** understreger, at det er vigtigt, at symbolerne anvendes på en klar og meningsfyldt måde, således at den matematiske tekst bliver klar og sammenhængende. Artiklens formål er at skærpe opmærksomheden herom i såvel skriftlig som mundtlig fremstilling af matematik. Artiklen omhandler objekterne tal, mængder og udsagn. Artiklen, der også indeholder små opgaver med facit, vil kunne anvendes i forbindelse med et kort forløb om god matematisk stil fra anden halvdel af 1.g og fremefter.

Matematikkens udvikling omtaler bevægelsen fra nye problemer til nye løsninger gennem en udvidelse af begreberne. En illustration heraf er

Charlotte Stefansens artikel **'Aristoteles om uendelighed':** Begrebet om uendelighed har gennem matematikkens historie voldt flere matematikere og filosoffer hovedbrud. Her beskrives kort,

hvorledes den græske filosof Aristoteles ved en distinktion mellem aktuel og potentiel væren giver et bud på, hvordan uendelighed skal opfattes. Beskrivelsen kan bruges til at lave et kortere forløb i en 2.- eller 3.g-klasse om matematikkens historie. Emnet kunne være uendelighed, men kunne også være en problematisering af matematikkens grundlag. Artiklen kan enten læses af eleverne eller anvendes som lærerens inspiration.

Matematisk ræsonnement omtaler bl.a. det matematiske bevis.

Mads Keinickes opsats **'Matematiske beviser'** foreslår, at man for at imødekomme elevernes vanskelighed med at forstå, hvad et matematisk bevis er, og hvorfor vi overhovedet gennemfører beviser, opstiller en fast skabelon til at analysere de beviser, som forekommer i lærebøgerne. Artiklen anviser, hvordan man kan opbygge en sådan skabelon, og hvordan man kan anvende den i undervisningen.

Til afsnittet Matematisk modellering hører artiklen:

Jørgen Ebbesen: **'Magrittes pibe og matematisk modellering'.** Matematisk modellering har ikke altid spillet den rolle, den gør i dag. Artiklen skitserer baggrunden for, at den er blevet central i gymnasiet, og præsenterer en model for modelleringsprocessen. Statistisk modellering, som er blevet opprioriteret med reformen og må forventes at spille en vigtig rolle i det tværfaglige samarbejde med biologi og samfundsfag, behandles særskilt i Jørgen Ebbesen: '**En kort bemærkning om stokastikken'**.

Endvidere præsenteres følgende indlæg, som er fagdidaktiske (Jakob Holm) eller videnskabsteoretiske i deres indhold, og som ifølge sagens natur overvejende er baggrundslæsning for læreren:

Jakob Holm: **'Kompetencer i matematik, ét redskab til at tale om videnskabelighed i matematik'** er et bud på ét redskab til at tale om matematikfagets videnskabelighed i AT-sammenhæng: at benytte kompetencer. Her benyttes kompetencerne fra den såkaldte KOM-rapport. Disse kompetencer introduceres kort, og derefter bliver de faglige mål fra bekendtgørelsen i Stx-A rubriceret under deres forskellige kompetencer.

Jakob Holms: **'Kompetencer i matematik, et eksempel'** er et grydeklart undervisningsforløb, hvor begrebsapparatet fra ovenstående artikel konkretiseres og eksemplificeres med udgangspunkt i en konkret modellering af alkoholindtagelse i forbindelse med bilkørsel. Indledningsvis analyseres modelleringsprocessen grundigt fra et kompetenceperspektiv. Dette leder frem til, at læseren selv skal kunne foretage analysen. Eksemplet kan læses og benyttes uafhængigt af den foregående artikel.

Jørgen Ebbesen: **'Elementær videnskabsteori aint no such thing'** argumenterer for, at udtrykket *elementær videnskabsteori* i sig selv ikke giver mening, og at vi derfor som matematiklærere i

gymnasiet har vide rammer for, hvordan vi vil fortolke det. Forfatteren giver sit personlige bud på, hvordan en sådan teori kan udformes med hovedvægten på faget som gymnasiefag. Inddragelse af fagdidaktiske spørgsmål kan ses som et middel til at gøre teorien meningsfuld for lærere og elever.

Jørgen Ebbesen: **'Den rette linje som den røde tråd'.** Med den rette linje som gennemgående eksempel illustreres, at det ikke er svært at anlægge et videnskabsteoretisk perspektiv på matematikfagets kernestof. I stedet for at tilrettelægge selvstændige forløb i videnskabsteori kan og bør videnskabsteorien ifølge artiklen integreres i den daglige undervisning.

Jørgen Ebbesen: **'Matematikfagets metoder'.** Artiklen plæderer for, at matematiks læreplan kan bruges som tjekliste, når eleverne skal redegøre for de anvendte metoder i AT-sammenhæng.

Jørgen Ebbesen: **'At smørrebrød er ikke mad'.** I den nye læreplan for AT er tværfaglighed på tværs af hovedområderne bortfaldet som fagligt mål. Det betyder formentligt, at mange flere elever vil vælge matematik som det ene fag til AT-eksamen. Det er glædeligt, men tvinger os samtidig til at tage stilling til spørgsmålet: hvornår er faget nødvendigt for at behandle sagen?

Hvad er tal?

Af Terese M. O. Nielsen

Hvad er tal? 5
Indledning 5
Emner - 1g 6
Regning - tal og repræsentationer af tal 6
Litteratur 6
Potenstal - definitioner og beviste sandheder 6
Oversigt over definition, sætning, aksiom 6
Forskellen på definitioner og udsagn 7
Findes naturlige tal? Hvordan? 9
Emner 2.g 12
Tal-repræsentationer, grænseværdier og eksistens 12
Rationale og irrationale tal 12
Emner 3. g 14
Komplekse tal og vektorregning 14
Matematikkens karakteristika 14
Øvelser om forskellige repræsentationer af det samme tal 16
Øvelser om definitioner og udsagn 18
Øvelser om eksistensen af naturlige tal 20
Øvelser om grænseværdier og eksistens af tal 21
Øvelser om rationale og irrationale tal 22

Indledning

Formål med denne skrivelse er at give matematiklærerne nogle øvelser, der kan puttes ind i almindelig undervisning, eller måske et kortere selvstændigt forløb (2-3 lektioner), om den filosofiske vinkel på spørgsmålet i overskriften: "Hvad er tal?".

Baggrunden er, at fag ofte karakteriseres ved deres genstandsområde(r) og deres metode(r). Eftersom mange af de emner, vi beskæftiger os med i matematik, kan føres tilbage til tal og former, er det oplagt at indsnævre spørgsmålet om, hvad matematikken egentlig handler om, til spørgsmålet om, hvad tal er. Derudover ligger det i direkte forlængelse af det almindelige arbejde med at undervise elever i at regne med forskellige tal-typer (brøker, negative tal, decimalnotation, potenser osv). I læreplanen for A-niveau indgår eksplicit "rationale og irrationale tal" som et emne, der kan give anledning til at spørge, hvad et tal er (mere om dette senere).

Emner - 1g

Regning - tal og repræsentationer af tal

Kernestof. Citat fra læreplanen
(https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=120566#Bil37)

> – regningsarternes hierarki, ligningsløsning med grafiske og simple analytiske metoder, procent- og rentesregning, absolut og relativ ændring
> – formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable

Alle elever skal kunne benytte brøker, decimaltal, procentsatser og potenstal. De bliver også præsenteret for videnskabelig notation, f.eks. Jordens masse skrevet som $m=5{,}976\cdot10^{27}$ g.

Dette kan give anledning til at tale om sprogfilosofi: navne og det, de er navne på; tegn og det, de betegner.

Formålet med øvelsen er

i) at eleverne bruger fagtermerne brøk, rationalt tal, procentsats, videnskabelig notation (i spørgsmål c)
ii) at eleverne diskuterer, at valg af repræsentation afhænger af kontekst og formål

Noget af det, der efter min mening er helt specielt for matematik er, at grænsen mellem tegn og det, de betegner, er langt mere flydende end i andre fag. Det er indlysende, at ordet "hest" og tingen hest ikke er det samme. Men det er knap så indlysende at tegnet "2" og tallet 2 ikke er det samme.

Øvelser om forskellige repræsentationer af det samme tal , se side 16.

Litteratur: Der findes utroligt meget sprogfilosofisk litteratur. Denne artikel danner udgangspunkt for meget af diskussionen, og så er den skrevet af en matematiker - som dog går ud fra, at man har læst Kant:

Gottlob Frege: "Om mening og betydning". I *Filosofiens, sprogets og matematikkens grundlag* (ved Peer F. Bundgaard og Lars Binderup). Forlaget Philosophia 2002.

Potenstal - definitioner og beviste sandheder

Eleverne skal lære potensregnereglerne. I den forbindelse støder man på forskellen på bevist sandhed og vedtaget definition, især i forbindelse med diskussion af, hvad a^0 betyder.

Oversigt over definition, sætning, aksiom

Her er en oversigt over definition, sætning og beviser. Bemærk, at det *ikke* er alment accepteret, at 1) noget skal kunne bevises for at være en sætning, og at 2) aksiomer er uafhængige af konventioner. Jeg bruger forklaringerne nedenfor alligevel, eftersom jeg ikke kender til nogen simpel, alment accepteret måde at redegøre for forskellene på inden for rammerne af, hvad der kan forstås af en gymnasieklasse.

Definition En definition er et udsagn, der er sandt alene i kraft af konvention.

Aksiom Et aksiom er et sandt udsagn, der ikke afhænger af konventionen og ikke kræver bevis.

Sætning En sætning er en (bevist eller beviselig) sandhed, der er sand i kraft af at den følger ved (logisk) udledning fra axiomer og definitioner.

Bemærkning

En vigtig forskel på definitioner og udsagn er, at en definition aldrig kan være et eksistensudsagn. Derfor er "der findes et tal, som er efterfølger til tallet 1" et aksiom, mens "efterfølgeren til tallet 1 kaldes 2" er en definition - som kun faktisk definerer noget, for så vidt aksiomet er sandt. Det er ikke altid let at afgøre, om et udsagn er det ene eller det andet. Tænk for eksempel på reelle tal. Er "de reelle tal, R, er mængden af alle grænseværdier af Cauchyfølger fra Q" 1) en navngivning af noget i forvejen eksisterende, eller 2) en konstruktionsbeskrivelse, der skaber det, den beskriver?

Eksempel på problematikken i forbindelse med potensregneregler

I forbindelse med potensregneregler introducerer vi eleverne for følgende.

Definition

Når n er et helt, positivt tal, betegner a^n produktet af n kopier af a: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ gange}}$.

Ud fra denne definition beviser vi

Sætning om potensregneregler

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, når m og n er hele, positive tal.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, når m og n er hele, positive tal med m>n

$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$, når m og n er hele, positive tal.

Og så siger vi, at vi ønsker at disse to regler også skal gælde, når m og n *ikke* opfylder betingelserne i sætningen. Ud fra dette får vi bl.a. resultaterne $a^0=1$ og $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, som erfaringsmæssigt strider imod mange elevers intuition, og som i sidste ende er definitioner, vedtaget ud fra at ønske om at have så få regneregler som muligt.

Forskellen på definitioner og udsagn

Det sker med jævne mellemrum, at elever efterspørger en forklaring på, hvorfor en definitionsmæssig kendsgerning er, som den er. Det kan man i sagens natur ikke give dem. Men

måske kan en diskussion af forskellen mellem definitioner og sætninger hjælpe dem til at forstå, hvorfor det ikke er rimeligt at spørge "hvorfor?" til en definition.

Her er en skematisk fremstilling af forskelle på begreberne og et link til nogle øvelser, der forhåbentlig kan give anledning til diskussion.

	Definition	**Axiom**	**Sætning**
Udsagn	er ikke et udsagn	er et sandt udsagn	er et sandt udsagn
Mulige sandhedsværdier	kan umuligt være falsk	kunne være falsk	kunne være falsk
Genstandsområde	handler om menneskers sprogbrug	handler om matematiske genstande og relationer	handler om matematiske genstande og relationer
Tidslig sandhedsværdi	er sand fra den bliver vedtaget	er altid sand	er altid sand
Bevisbarhed	kan ikke bevises	kan ikke bevises	kan bevises[1]
Tomme tegn eller meningsfulde tegn	handler om tegn, der ikke her en mening på forhånd	handler om begreber med en fast mening	handler om begreber med en fast mening

Øvelser om definitioner og udsagn, se side 18.

Litteratur

STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY har et opslag om definitioner:

http://www.science.uva.nl/~seop/entries/definitions/

Den er forholdsvis teknisk. Den grundlæggende ide er, at en definition ikke bringer ny viden ind i en teori. Som sådan minder opdelingen i definitioner og (egentlige) udsagn om Kants skelnen mellem analytiske og syntetiske udsagn. Kant forudsætter dog, at alle betydninger af ord er fastlagt.

Immanuel Kant: *Kritik af den rene fornuft. Indledning*. "IV. Om forskellene mellem analytiske og syntetiske domme.". B10-B12. s. 67-69 i De store Tænkere, ved Justus Harnack. Munksgaard, København 1991

[1] Der findes sande, ubeviselige sætninger, jf. Gödels ufuldstændighedssætning. Omvendt kan enhver ikke-selvmodsigende påstand bevises i et formelt system, hvor påstanden selv er et axiom. Der er altså et åbent spørgsmål om, hvilket system en sætning skal kunne bevises inden for (og *om* den skal kunne bevises) for at være en sætning. Men det vil føre for vidt at gå i detaljer med det her.

Findes naturlige tal? Hvordan?

Hvis man stiller spørgsmålet "hvor mange?", mens man peger på en bunke legoklodser, vil de fleste antage, at man implicit mener "hvor mange *legoklodser*?" og besvare spørgsmålet derudfra. Legoklodser er tydeligt adskilte genstande, og man vil få det samme svar på sit spørgsmål, uanset hvordan legoklodserne er arrangeret. Man kan bygge et tårn af dem eller lægge dem i en rodet bunke, og svaret vil være det samme.

Hvis man stiller det samme spørgsmål, "hvor mange?" , mens man peger på en eller flere klumper modellervoks, er det ikke sikkert, at folk ved, hvad de skal svare. Og selv hvis de svarer f.eks. 2 eller 4, kan man tage præcis den samme mængde modellervoks og dele den op eller klumpe den sammen og måske få andre svar.

Denne øvelse bliver tit taget til indtægt for, at tal ikke er fysiske genstande. For *hvis* tallet 5 var en fysisk genstand, burde dets placering i rummet ikke ændre dets værdi. Man burde ikke kunne lave tallet 5 om til tallet 2 ved at flytte på (noget af) det.[2]

Man kan fortolke opfattelsen af tal som knyttet til fysiske genstande på to måder. Enten er tal faktiske egenskaber ved fysiske genstande, som genstandene har, uanset om mennesker lægger mærke til det eller ej (Stuart Mill). Eller tal er egenskaber ved menneskers opfattelse af verden (Kant). Vi organiserer vores sanseindtryk sådan, at tal opstår.

Der er forskellige versioner af begge synspunkter.

Hvis man siger, at tal er egenskaber ved fysiske genstande, kan man spørge, hvad en egenskab er? Nogen (Platon) vil svare, at det er en uafhængigt eksisterende abstraktion. Andre (Aristoteles) vil svare, at det er det faktum, at man ikke kan have stof der eksisterer, uden at det eksisterer på en eller anden måde - det vil enten være rundt eller firkantet, det kan ikke være formløst. Hvis man fortolker udsagnet platonisk, kan tallet 81299999789440984976849876953879074865974957659777777760000079834 godt findes, uafhængigt af om det er manifesteret i en faktisk eksisterende fysisk genstand. Hvis man fortolker 'egenskab' aristotelisk, findes så stort et tal ikke.[3]

Hvis man siger, at tal er egenskaber ved menneskers opfattelse af verden, kan dette igen forstås på to måder. I den ene version er tallene subjektive. Jeg vælger at opfatte legoklodserne som 2, og jeg kunne have valgt anderledes. Jeg konstruerer tallet to ud fra det mentale billede, som legoklodserne giver mig. I den anden version (Kant) er der tale om intersubjektive størrelser, i og med at tal-egenskaberne er givet på forhånd for alle mennesker og ikke kan vælges eller ændres.

En sidste version er at sige, at der ikke er nogen forbindelse mellem den fysiske verden og tallene overhovedet. Eller, hvis der er, er den klistret på senere, og set fra den rene matematiks synspunkt behøver man ikke bekymrer sig om den. Ifølge denne opfattelse er tal tegn, nærmere bestemt rækker af lodrette streger. Tallet 2 er en forkortelse af "||". Man kan, hvis man har lyst, danne en

[2] Jeg mener, jeg oprindeligt har læst eksemplet i Crispin Wright (1983): *Frege's Conception of Numbers as Objects.*
[3] Se også Charlotte Stephansens bidrag til nærværende artikelsamling.

forbindelse mellem "||" og nogle legoklodser, men det er uden for matematikkens og matematikerens område at dømme, om det er korrekt eller forkert at gøre.

Alle de skitserede opfattelser har filosofiske problemer. Man kan stille spørgsmål til alle synspunkterne, som de vil have vanskeligt ved at besvare.

Tal er fysiske genstande

Hvis tal er fysiske genstande, må man gå ud fra, at der kun er endeligt mange af dem, hvilket strider imod vores gængse matematik.

Tal er egenskaber ved fysiske genstande

Vi opfatter normalt ikke tals eksistens som tidsbegrænset eller relativ. Men hvis 5 er en egenskab ved legoklodserne, kan 5 ophører med at eksistere eller ændres. Man kan forestille sig, at jeg sendte en legoklods til Afrika, en til Kina, en til Peru, en til Grønland og beholdt en her. Ville legoklodserne så stadig have egenskaben 5? Eller hvad nu, hvis jeg føjer to legoklodser til min bunke. Har de så både egenskab 5 og egenskaben 7? Er 5 så det samme som 7?

Tal er mentale konstruktioner

Mentale konstruktioner må være personlige, knyttet til en bestemt bevidsthed, der har foretaget konstruktionen. Men tal er fælles eller objektive.

Tal er (fælles) træk ved menneskers bevidsthed

Hvis tal er fælles træk ved menneskers bevidsthed, findes de i og med der findes mennesker. Men så var der ikke tal for 50 millioner år siden. Det har konsekvenser for sandheden af f.eks. "2+2=4" som enten var et tomt udsagn (på linje med "lyserøde giraffer elsker is") eller falsk for 50 millioner år siden.

Tal er uafhængigt eksisterende abstrakte genstande

Hvis det er sandt, er tal evige, uden udstrækning, farve, smag og lugt. Men det gør det til et mysterium, hvordan vi kan vide noget om dem, siden vi ikke lader til at kunne få information om dem gennem vores normale kanaler, sanserne. Det betyder, at hvis vores udsagn om sand faktisk er sande, så kan dette kun være ved rene lykketræf, siden der ikke er noget der knytter tallene og vores viden om tallene sammen.[4]

Tal er tegn

Hvis tal er tegn, kan man spørge *hvilke* tegn de er? Er 2, 10, ii, β, 2.000, ‖ det samme tegn? Er 4 større end 3? Hvilken farve har tallene? Og så videre. Disse spørgsmål virker absurde, men er meningsfulde ud fra et strengt formalistisk synspunkt.

[4] Dette er indholdet af Paul Benacerrafs artikel "Mathematical Truth" fra 1973. Genoptrykt i Putnam & Benacerraf (red): *Philosophy of Mathematics*, s. 403-420. Cambridge University Press, 1983.

I skemaet nedenfor har jeg sammenfattet talopfattelserne ovenfor og de problemer, de hver især har.

Talopfattelse	Tal er fysiske gen-stande	Tal er egenskaber ved fysiske genstande	Tal er mentale konstruktioner	Tal er træk ved menneskers bevidsthed	Tal er uafhængigt eksisterende abstrakte genstande	Tal er tegn
Problem	Hvor er de?	Har modellervoksen egenskaben 1 eller 10000?	Er dit 2-tal det samme som mit?	Det var vel sandt, at 2+2=4 før menneskets opståen? Hvordan kan det være, hvis der ikke var noget 2?	Hvordan kan vi vide noget om dem?	Men tal er ikke blå eller røde, og det er tegn.
Repræsentant for synspunktet		John Stuart Mill, (Tidlig) Penelope Maddy	Hartry Field	intuitio-nisme Inspireret af Kant, som dog mente, tal var træk ved *al mulig* fornuft og ikke kun knyttet til mennesker	Platon	David Hilbert
Realisme eller ej	anti-realisme	?	antirealisme	antirealisme	realisme	Anti-realisme

Normalt deler man matematikfilosofiske synspunkter op i realisme og anti-realisme med hensyn til eksistensspørgsmålet.

En *realist* mener, at matematikkens genstande eksisterer i sig selv, uafhængigt af hvad mennesker tænker og tror og uafhængigt af den fysiske verden. Af synspunkterne ovenfor er kun det platoniske strengt realistisk med hensyn til ontologi.[5]

En *antirealist* mener, at matematikkens genstande ikke eksisterer uafhængigt af menneskers bevidsthed og/eller den fysiske verden.

Øvelser om eksistensen af naturlige tal , se side 20.

Emner 2.g

I 2.g introduceres differentialregning, herunder grænseværdibegrebet. Dette begreb optræder også i forbindelse med talrepræsentationer

Tal-repræsentationer, grænseværdier og eksistens

Det er min erfaring, at mange elever har nogle uformulerede, forudfattede vaner, der går ud på, at 'rigtige' tal er decimaltal, og at lommeregneren har ret. Det gør det svært at regne med bogstaver og at acceptere f.eks. $\sqrt{13}$ som et resultat. Jeg har lavet nogle øvelser med det formål at få dem til at diskutere

- hvornår står to tegn for samme tal (med eksemplerne $\frac{1}{3}$ og $0,\bar{3}$, $0,\bar{9}$ og 1)

Det skulle gerne lede frem til denne

Definition af identitet mellem tal

To tal er ens, hvis deres differens kan gøres mindre end et vilkårligt, positivt tal.

Man kan bruge eleverne eksemplerne med $\bar{}$ -notationen til at forklare grænseværdibegrebet.

$0.\bar{3}$ betyder i virkeligheden grænseværdien af følgen 0.3, 0.33, 0.333, osv.

Med dette eksempel kan man definitionen af identitet måske hjælpe til at gøre begrebet grænseværdi mere spiselig, fordi den bygger på en ide om at enshed er forskellen-er-mindre-end-hvad som helst:

Definition af grænseværdi af en følge (tillempet gymnasiebrug, dvs uden 'for alle n>N')

En følge (x_n) har grænseværdien x, hvis forskellen mellem x og det n'te led i følgen kan gøres mindre end et vilkårligt, positivt tal, når bare n er stor nok,

I forbindelse med grænseværdibegrebet skal vi som regel berøre den mulighed, at det ikke er altid, grænseværdien eksisterer. Ikke alle symboler, der ligner navne på tal, er faktisk navne på tal. Derfor

[5] Der findes en tilsvarende opdeling i realisme og antirealisme med hensyn til sandhed. En epistemologisk realist mener, at matematiske udsagn er sande eller falske, hvad enten vi ved det (eller overhovedet kan vide det) eller ej. En antirealist mener, at matematisk sandhed må hænge sammen med erkendeevne på en eller anden måde; de to ting kan ikke være uafhængige af hinanden.

har jeg lavet nogle øvelser om 'endepunkter' i åbne intervaller, efter at have haft mange, mange diskussioner med elever om 'det mindste tal, der er større end 0'.

Endelig foreslår jeg, at man illustrerer de problemer der kan være med at repræsentere uendeligt mange tal ved at vise eleverne, at lommeregneren i hvert fald *ikke* kan.

Alle disse eksempler er filosofiske, fordi spørgsmål om, hvornår og hvordan tegn har betydning, er en filosofisk diskussion, ligesom spørgsmål om, hvornår og hvordan noget er det samme er. Eventuelt kan man tage spørgsmålet "Er tal tegn?" fra Afsnittet "Hvad er naturlige tal?" op.

Øvelser om uendelige tal-repræsentationer , se side 21.

Rationale og irrationale tal

Fra Cantor ved vi, at der er lige mange rationale og naturlige tal, men at der er flere reelle tal end rationale tal. Vi ved også, at der er tælleligt mange algebraiske tal (som f.eks. $\sqrt{2}$), men overtælleligt mange transcendente tal (som f.eks. π og e). Det er min påstand, at for mange elever er talopfattelsen knyttet til symbolerne for tal. Det gør det meget vanskeligt at forstå ideen om, at der er flere tal, end der er symboler. Det kan måske være interessant at vise eleverne, samtidig med at der er god lejlighed til at lave ræsonnementer og udpege netop matematiske beviser og den skarpe formulering af definitioner som et særkende ved matematik.

Mulige emner.

- Bevis for at $\sqrt{2}$ er irrational. Generalisér til $\sqrt{p}$ er irrational for ethvert primtal, p.
- Cantors diagonalargumenter. Giv mig en liste med alle navne på alle tal, og jeg kan nævne et tal, der ikke er med på listen. Så der er flere tal, end der er navne (med et højst tælleligt alfabet).
- π. Det er umuligt at skrive π ned som decimaltal. Hvordan gør man, når man gør det alligevel? F.eks π som grænseværdien af omkredsen af en n-kant med diameter 1, når n går mod uendelig. (π med 4 millioner decimaler findes på http://zenwerx.com/pi.php)
- Der er lige så mange rationale som naturlige tal, fordi 'lige så mange X som Y' betyder 'for hvert X er der ét og kun ét Y'. Sammenlign med 'der er lige så mange knive som tallerkener, fordi ud for hver tallerken ligger én og kun én kniv' (Freges eksempel).
- Hvorfor er der ikke huller i den reelle akse? Der er huller i den fysiske streg, vi tegner på tavlen.
- Findes irrationale tal? Hvor mange tal er der? Hvor mange tal kan jeres lommeregner regne med?

Øvelser med rationale og irrationale tal , se side 22.

Emner 3. g

Komplekse tal og vektorregning

I 3g kender eleverne talmængderne N, Z, Q og R og har vænnet sig til, at f.eks. $\sqrt{17}$ er et tal, lige så vel som 0,25. Det er muligt at stille talmængderne op som de resultater, man får, når man får flere og flere regneoperationer til sin rådighed:

N – alt, hvad man kan lave v.h.a. 1 og addition og multiplikation

Z – alt, hvad man kan lave v.h.a. N og subtraktion

Q – alt, hvad man kan lave v.h.a. Z og division

R – alt, hvad man kan lave v.h.a. Q og grænseovergang. Dette vil f.eks. være løsninger til regnestykket $x^2=2$, så man fremhæver ofte roduddragning som en ny regneoperation.

De reelle tal, R, er fuldstændiggørelsen af Q: det, der skal til for at lappe hullerne og danne en sammenhængende tallinje. Men når eleverne støder på vektorer, eller man eventuelt har et forløb eller en SRP om komplekse tal, kan man spørge til, hvorfor tal skal være på en linje?

Hvorfor er R 1-dimensionel?

Hvorfor er vektorer ikke tal?

C er to-dimensionel. Derudover findes der kvarternioner, som er et firdimensionelt tallegeme, og octinioner, som er et ottedimensionelt tallegeme.[6] Hvordan kan det være? Dette er i lige så høj grad et rent matematisk spørgsmål, som nok er for svært at gå i dybden med.

En diskussion af de komplekse tal kan også sætte fokus på spørgsmålet om kriterier for eksistens.

Hvad skal der til, for at noget findes? I matematik kræver vi normalt blot, at der kan gives en modsætningsfri definition, mens man i fysik ønsker sig en måling eller observation som bekræftelse på eksistensen af en postuleret entitet. Dette er i øvrigt den tanke, der ligger til grund for fiktionalisme: det synspunkt, at matematikkens genstande er af samme karakter som Snehvide, og at matematisk sandhed svarer til sandhedsbegrebet i fiktion.

Matematikkens karakteristika

Hvis eleverne i 3g vælger matematik til AT-eksamen, bør de være forberedt på at kunne

> – vurdere de forskellige fags og faglige metoders muligheder og begrænsninger i forhold til den konkrete sag
> – demonstrere indsigt i videnskabelig tankegang og gøre sig elementære videnskabsteoretiske overvejelser i forhold til den konkrete sag.

Fra AT- læreplanen https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=132647#B9

[6] Se http://en.wikipedia.org/wiki/Number .

Det vil sige, at de skal kunne karakterisere matematik og matematikkens muligheder for at belyse deres AT-sag.

I den forbindelse vil følgende spørgsmål naturligt dukke op:

1. Hvad er specielt ved matematik? Og hvorfor kan matematikken bruges i *denne* sammenhæng?
2. Hvordan er matematik forskellig fra fysik, dansk, billedkunst, tysk, naturgeografi osv osv?
3. Hvad har matematik til fælles med fysik, dansk, billedkunst, tysk, naturgeografi osv osv?
4. Hvad er matematik særligt godt til? Hvad er matematik særligt dårligt til?

Her er en liste over mulige svar, både fra filosoffer og elever. Læg mærke til, at de enkelte svar ikke nødvendigvis er indbyrdes konsistente. Listen er formentlig ikke udtømmende.

1) Matematikken
   a) har et specielt genstandsområde, som hverken er fysisk eller kulturelt (platonisme)
   b) er resultatet af menneskets historiske omgang med tal og former
   c) er faget, hvor man beviser sine resultater
   d) er en gren af logikken (logicisme)
   e) er abstraheret fra fysik (fysikalisme)
   f) kan anvendes på tværs af flere genstandsområder
   g) er mere generel end andre fag
   h) formidles i lærebøger bygget op v.h.a. *Definition*, *Sætning*, *Bevis*, *Eksempel*
2) Matematikken er forskellig fra andre fag, fordi
   a) andre fag ikke behandler f.eks. tal som et særskilt emneområde, men bare anvender dem
   b) den ikke er kultur-afhængig
   c) den er mere præcis
   d) den er mere velunderbygget
   e) der altid er et svar
   f) den altid er sand
3) Matematikken har det til fælles med andre fag, at
   a) den stræber efter sikker viden
   b) den er videnskabelig
   c) den er ikke subjektiv
4) Hvad er matematik særligt godt til? Hvad er matematik særligt dårligt til?
   a) Matematik kan beskrive alt, der kan tælles, måles eller beskrives geometrisk. Matematik kan ikke håndtere det, der ikke kan kvanticeres, stilles op i rækkefølge eller beskrives geometrisk.

Læg mærke til, at 1d) og 1e) er i modstrid med hinanden, og at 2e) er forkert, mens adskillige af de øvrige svar er vage.

Øvelser om forskellige repræsentationer af det samme tal

Øvelse 1

Her er et antal forskellige betegnelser.

$\frac{1}{4}$	0,25	$\frac{2}{8}$	25%
$2{,}5\cdot10^{-1}$	en kvart	0,250	$1-\frac{3}{4}$

a) Hvilke(n) mængde(r) tilhører hvert enkelt tal?
b) Hvad har betegnelserne til fælles?
c) Hvad er forskellene på betegnelserne?
d) Angiv hvilken type betegnelser der er tale om.
e) Hvilken måde at skrive tallet på er bedst? I hvilke situationer?
f) Er der en af betegnelserne, der er den rigtige?

Øvelse 2

Her er beskrevet et antal situationer, hvor tallet fra øvelse 1 indgår. Hvilken af repræsentationerne vælger du?

a) Jeg vil gerne have et stykke af pizzaen.
b) Jeg skal angive moms på en vare.
c) Jeg skriver fysik-rapport og har målt en længde.
d) Jeg løser ligningen 4x=1 ved at dividere med 4 på begge sider af lighedstegnet.

Øvelse 3 om potensregneregler

Tallet $9^{½}$ er det samme som 3, fordi $(9^{½})^2 = 9$, og fordi $3^2 = 9$.

Når symbolet $9^{½}$ og 3 opfylder samme regneregler, må de stå for samme tal.

a) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $27^{\frac{1}{3}}$ er?'
b) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $8^{\frac{2}{3}}$ er?
c) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $256^{\frac{3}{4}}$ er?
d) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $256^{0,75}$ er?
e) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $56^{\frac{277859}{10000000}}$ er?
f) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $7849^{2,3478935}$ er?

Tillægsspørgsmål (til emnet repræsentationer og det, de repræsenterer, på senere klassetrin)

- Er $\frac{1}{4}$ et tal eller et regnestykke? Hvornår er det hvad? Hvilke tal er regnestykker, og hvilke er tal?
- Hvis vi siger, at alle tegnene fra øvelse 1 er betegnelser for det samme tal, hvad er dette tal så?
- Er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ et tal eller et regnestykke? Er e? Er π? Er i?

Øvelser om definitioner og udsagn

Forklaring af begreber

En *definition* er et udsagn, der er sandt alene i kraft af konventionen.

Det er med andre ord en slags dåbshandling; en vedtagelse af, hvad et ord eller tegn skal betyde fremover.

Et *udsagn* er derimod sand eller falsk, uafhængigt af hvordan mennesker beslutter at bruge ord og tegn.

En definition handler om ords og tegns betydning. Et udsagn siger noget om det, som ordene og tegnene betyder.

Bemærkning

Det er klart, at "hunden siger miav" ville være sand, hvis vi havde defineret betydningen af orden "hund" anderledes. Men givet, at vi sædvanligvis bruger ordet "hund" om hunde og ikke katte, er "hunden siger miav" falsk. Vi udtaler os altid inden for rammerne af normal sprogbrug.

Øvelse

Hvilke af udsagnene nedenfor er eksempler på definitioner og hvilke er udsagn?

a) "Jeg døber dig Silas"

b) "Silas er 10 år gammel."

c) "Hovedstaden i Danmark hedder København."

d) "π er forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter"

e) "2+2=4"

f) "2+2=5"

g) "Kvadratroden af 9 er det positive tal, som giver 9, når man ganger det med sig selv."

h) "Kvadratroden af 9 er 3."

i) "Hypotenusen er den side i en retvinklet trekant, der ligger over for den rette vinkel."

j) "I en retvinklet trekant med sider 3 og 4 er hypotenusen 5"

k) "$a^2=a\cdot a$"

l) "$a^2\cdot a^3=a^5$"

Forslag til gruppearbejde - definitioner kan ikke bevises, sætninger skal bevises

Alle grupper tildeles et kapitel hver i lærebogen og finder definitioner og sætninger.

Grupperne skriver definitionerne og sætningerne af uden at skrive, om de er definitioner eller sætninger.

Grupperne giver deres afskrifter videre til nabo-gruppen, som skal sortere definitionerne og sætningerne fra hinanden.

Øvelser om eksistensen af naturlige tal

Legoklodser og modellervoks

Medbring legoklodser og modellervoks og flyt rundt med begge dele.

Hvilket tal svarer denne bunke klodser til?

Hvilket tal svarer denne klump modellervoks til?

Tæl klassen (hvad betyder det? Hvad er enheden?).

Tæl næser. Tæl ører. Tæl tasker. Tæl blyanter og matematikbøger.

Kaniner og vanddråber

Vi har en kanin og en kanin mere. Der går et år. Hvor mange kaniner har vi nu? Hvad er 1+1?

Vi har en vanddråbe og en vanddråbe på vej ned ad en rude. De mødes. Hvor mange vanddråber har vi nu? Hvad er 1+1?

Formål med øvelserne

Tal er ikke umiddelbart en egenskab ved fysiske genstande - for det er ikke éntydigt om modellervoksen skal tælles som 1, 2 eller 100.000. Eller éntydigt, at 1+1 giver 1, hvis man regner i kaniner og regndråber.

Skal nogen have tænkt på et tal for at det findes?

Tag alle mennesker, der har levet indtil nu. Tag det største tal de hver især har tænkt på. Tag det største af alle de mange store tal. Læg 1 til. Det må være det største tal, nogen nogensinde har tænkt på. Fandtes det for 10 minutter siden? Hvis ja, hvordan? Hvis nej, gjaldt de almindelige regneregler så kun op til det hidtil største tal? Gælder de for det nye tal?

Taltegn

Spørg: Er 3 større end 2 ?

Tal-tegn. Vis hieroglyffer, kileskrift, romertal, grækernes bogstaver. Er det tal? Bland evt. med bogstaver fra andre alfabeter og spørg, hvilke af tegnene der er tal.

Havde symbolet $7^{\frac{2}{3}}$ en mening før mennesker fandt på potensregneregler?

Tereses lidt kontroversielle, strukturalistisk inspirerede konklusion: tal er det, der opfører sig i overensstemmelse med regnereglerne. Derfor kan *i* f.eks. være et tal.

Øvelser om grænseværdier og eksistens af tal

$\frac{1}{3}$ som brøk og tilnærmet med decimaltal

Er 0,3 det samme som $\frac{1}{3}$? Er 0,33 det samme som $\frac{1}{3}$?

Er 0,33333333333333333333333333333333333333 det samme som $\frac{1}{3}$?

Er $0,\overline{3}$ det samme som $\frac{1}{3}$?

Begrund jeres svar. Hvornår er to tal ens?

Tallet $0,\overline{9}$ og tallet 1

Er $0,\overline{9}$ forskelligt fra tallet 1?

Hvis ja, er forskellen større end 0,0001? End 0,0000000000000001? End 10^{-100}?

Hvis nej, hvorfor? Hvornår er to tal ens?

Intervaller - uendelige mængder

Hvilke endepunkter (om nogen) har intervallet $[0;1]$?

Kan intervallet $]0;1[$ skrives som et lukket interval? Hvilke endepunkter ville det have?

Er "det mindste positive tal, der er skarpt større end 0" et tal? Hvis ja, hvilket? Hvis nej, hvorfor ikke?

Er "det største tal, der er skarpt mindre end 1" et tal? Hvis ja, hvilket? Hvis nej, hvorfor ikke?

Lommeregneren har kun endeligt mange tal-repræsentationer til sin rådighed

Tast 1000^{1000} ind på jeres lommeregner. Min svarer ∞. Hvorfor?

Hvor store tal kan jeres lommeregnere håndtere?

Tast 10^{-1000} ind på jeres lommeregner. Min svarer 0. Er det rigtigt? Hvorfor siger lommeregneren det? Hvor små tal kan jeres lommeregner håndtere?

Grænseværdier

Talfølgen

1, 0.1, 0.01; 0.001; 0.0001; 0.00001 …

har en grænseværdi. Hvad er den?

Har talfølgen

1 10 100 1000 10000 100000…

en grænseværdi? Hvorfor/hvorfor ikke?

Eksistens af tal: hvilke af disse beskrivelser er beskrivelser af et fast tal?

Forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter.

Forholdet en cirkels volumen og dens diameter.

Det mindste tal større end 2.

Grænseværdien af følgen 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1….

Grundtallet for den naturlige logaritme.

Det mindste tal, der kan defineres med højst 20 ord.

Det positive tal, der giver 3, når man ganger det med sig selv.

Det sidste tal i talrækken.

Det første tal i rækken af naturlige tal.

Det første tal i rækken af hele tal.

Grænseværdien af følgen 0, 0, 0, 0, 0, ….

Den tredje rod af kvadratet på syv.

Kvadratroden af minus syv.

Øvelser om rationale og irrationale tal

Alle decimaltal er brøker

Skriv 0,234 om til en brøk

Skriv 0,111 om til en brøk

Skriv 3,1415 om til en brøk

Ikke alle tal kan skrives om til brøker (uden brug af 'gentagelses'-notation)

Nævn mindst 3 tal, der ikke kan skrives som brøker.

Rotter og indianere. Og Kloge Hans.

Af Jørgen Ebbesen

Tal, sprog og kognition

Et af de mere delikate spørgsmål inden for matematikkens videnskabsteori er det ontologiske spørgsmål: hvad er de matematiske objekter for en slags størrelser, i hvilken forstand eksisterer de? Er de menneskeskabte, eller ville de være der, selv hvis der ikke var mennesker til?

Det er ganske let at afvise spørgsmålene som noget fortænkt pladder. Tag fx det sidste. Hvordan skulle vi mennesker kunne afgøre, om matematikkens objekter eksisterede, hvis vi ikke selv gjorde det, og hvilken glæde ville vi i øvrigt have af svaret?

Men alligevel er der noget fascinerende ved spørgsmålene. Det er underligt, at det er så svært at forklare, hvad noget så velkendt som fx tallene er. Man kan anlægge den synsvinkel, at tallene og det, vi gør ved dem, udgør et lille hjørne af menneskets sprog, og som sådan er menneskeskabt. Men der er noget specielt ved dette hjørne: det virker mere universelt end resten af sproget. Normalt er det svært at oversætte ordret fra et sprog til et andet – der er en tendens til, at sprog er mere nuancerede på områder, som optager de mennesker, der taler dem. Desværre er de over hundrede ord for sne på grønlandsk en myte[7] – der findes kun to! Men når myten er så sejlivet, er det fordi, at den udtrykker noget, vi alle sammen godt ved. Nemlig at sproget er kulturelt forankret. Men talordene findes på de fleste sprog – der er dog interessante undtagelser, se senere – og er som regel direkte oversættelige fra sprog til sprog – på tværs af kulturer. Så selv hvis man accepterer, at matematik er en menneskeskabt sproglig praksis, står man med det problem, at man er nødt til at forklare, hvad der gør denne praksis til noget helt specielt.

Blandt andet vil de fleste naturvidenskabsfolk nok være villige til at skrive under på Galileis berømte ord om, at ***Naturens*** *store bog er skrevet* ***i det*** *matematiske* ***sprog***. Men som Eugene Wigner påpeger i sin banebrydende artikel ***The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Science***[8] (1960) er der tale om noget nær et mirakel. Det er måske nok til at forstå, at matematikken kan bruges til at beskrive observerbare hverdagsfænomener, som hvordan ting ser ud, og hvordan de bevæger sig. For det er matematik i nogen grad udviklet til. Men hvordan kan matematikken bruges til at forudsige observerbare fænomener inden for kvantemekanik og almen relativitetsteori. Områder, der ligger milevidt fra vores hverdagserfaringer?

Med mindre naturligvis, at de matematiske strukturer på en eller anden mystisk måde er indbygget i naturen. Man kan stramme den lidt og hævde, at matematikkens objekter nødvendigvis må

[7] Læs fx Henrik Dahl: Eskimoers hundrede ord for sne er en myte, 2009 på http://videnskab.dk/content/dk/kultur/eskimoers_hundrede_ord_for_sne_er_en_myte

[8] Eugene Wigner: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, no. I (February 1960). Kan downloades fra http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/tp3/QM/wigner.pdf

eksistere, fordi de er nødvendige i naturvidenskab ***(Quine–Putnam*** *uundværligheds argument for realisme).*

Synspunktet kan naturligvis kritiseres. For hvis de matematiske strukturer eksisterer i en eller anden forstand, så har vi et problem (kendt blandt filosoffer som Benacerrafs dilemma). Så er et udsagn om en matematisk struktur jo sandt, hvis strukturen opfylder udsagnet. Men det er jo ikke sådan, at vi afgør, om matematiske udsagn er sande. Det gør vi ved at bevise dem. Vi har altså to konkurrerende sandhedsbegreber. Det er ikke så godt. Og ikke nok med det. Beviserne bygger på aksiomsystemer. Hvordan sikrer vi os, at aksiomerne beskriver virkeligheden?

Man kan blive helt rundtosset, man havner jo i noget snavs, ligegyldigt hvilken position, man indtager. Måske er her en ide til et indslag i matematikundervisningen: del eleverne op i to grupper. Den ene skal optræde som realister, den anden som antirealister. De skal så argumentere for deres respektive syn på matematik. Hvis man forsyner dem med passende stikord, kan de finde argumenter på nettet til at argumentere modpartens synspunkt langt ned under gulvbrædderne. Det bliver straks sværere at forsvare sit eget synspunkt, så der skulle være mulighed for en god og medrivende diskussion.

Realismediskussionen er i øvrigt ikke kun indskrænket til matematik, men den har det – lige som alle andre filosofiske emner – med at blive noget højpandet. Vi forlader derfor det filosofiske spor for at angribe sammenhængen mellem sprog og matematik fra en lidt anden synsvinkel.

Omdrejningspunktet er Whorf-Saphir hypotesen, som i grove træk hævder, at vores tanker er formet af det sprog, vi taler. Det er en kontroversiel påstand, som findes i mange varianter. I den bløde ende af skalaen udtrykker WS-hypotesen noget, som artiklens forfatter er tilbøjelig til at tilslutte sig: sproget påvirker vore tanker. Hvis man fx har lært differential- og integralregning, forsynes man med et mentalt værktøj, som gør det lettere at tænke nogle bestemte tanker om bevægelser og vækst. I den anden ende af skalaen udarter WS-hypotesen til, at strukturen af det enkelte menneskes modersmål fuldstændig fastlægger vedkommendes mentale verdensbillede. Det skal retfærdigvis anføres, at hverken Whorf eller Saphir var talsmænd for denne mere ekstreme position.

Elevopgave 1

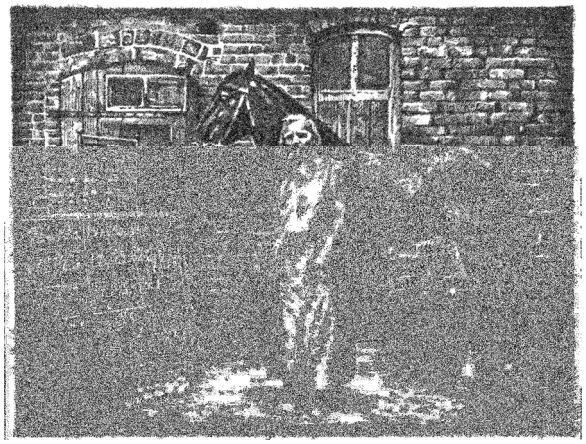
Find informationer på nettet om Whorf-Saphirs hypotese. Ser alle mennesker de samme farver? Afhænger de farver man ser, af det sprog, man taler? Findes der empiriske undersøgelser af spørgsmålet? I Amazonas lever fx en indianerstamme, pirahãerne isoleret fra omverdenen. De har tilsyneladende ikke ord for farverne. Ser de verden på en anden måde, end vi gør?

Jeg tror, at det er muligt at stable et afsindigt spændende AT-forløb med temaet ***Sprog, tanke og virkelighed – hvad former hvad?*** På benene. Måske er det bedst egnet til en eksamensopgave? Udover at emnet er spændende, giver det mulighed for at få nye fag på banen, da det vil være oplagt at forlange, at et fremmedsprog eller matematik inddrages. Og det bliver for en gang skyld svært at inddrage faget historie. Ideen være hermed givet videre. Hvis læseren sidder og spekulerer over, hvor i al verden matematik kommer ind i billedet, så vent og se.

Vi hænger lige Whorf-Saphirs hypotese lidt til tørre. Vi kaster os i stedet over de forsvarsløse dyr. De har i hvert fald ikke noget sprog, som kan påvirke deres (tanker i det omfang, de har nogen, og deres) adfærd.

Men først historien om Kloge Hans, der viser, hvor let det er at tage fejl, når man studerer dyreadfærd.

I år 1900 købte den pensionerede matematiklærer i gymnasiet Wilhelm von Osten en araberhingst.



Som det fremgår af billedet, var der tale om et ualmindeligt smukt dyr. Men hesten var ikke bare smuk. Van Osten var overbevist om, at dyr er intelligente, og som det ses til venstre i billedet, havde van Osten svært ved at slippe sit gamle job. Han lærte blandt andet hesten tysk, logik og matematik. Han var med rette stolt af hesten. Så stolt, at han rejste Tyskland rundt for at vise sin dygtige hest, som han kaldte Kluger Hans (Kloge Hans) frem. Og det ganske gratis, for van Osten var en idealist, der troede på sin hests evner, og ikke en gemen plattenslager, der scorede kassen ved at føre publikum bag lyset. Hvis van Osten spurgte Kloge Hans: "Hvad giver $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$?", ville Kloge Hans svare ved først at skrabe 5 gange med hoven, holde en pause og til sidst skrabe 6 gange med hoven. Kloge Hans kunne også svare på regnestykkerne, hvis de blev skrevet op på en tavle.

Elevopgave 2

Regnede Kloge Hans rigtigt?

Van Osten og Kloge Hans blev så berømte, at det tyske undervisningsministerium nedsatte et ekspertpanel, ***Kloge Hans Kommissionen***, som i 1904 nåede frem til det resultat, at der ikke var snyd med i billedet, og at Kloge Hans regnede som en gennemsnitsskoleelev på 14 år.

Den mest oplagte mulighed for snyd ville være, at det var van Osten, der signalerede de rigtige svar til Kloge Hans. Men Kloge Hans kunne regne, selv om van Osten ikke var til stede!

De følgende spørgsmål skal ikke udleveres på en gang, for et spørgsmål vil typisk indeholder oplysninger, der røber svaret på de foregående.

Elevopgave 3

Diskussionsopgave. Var det snyd, eller hvad? Kan dyr tælle og regne? Kender I eksempler, der tyder på det? Eller på det modsatte?

I 1907 påviste psykologen Oscar Pfungst, at Kloge Hans faktisk var utrolig begavet. Men regne kunne hesten ikke.

Elevopgave 4

Oscar Pfungst viste først publikum tavlen med regnestykket, så viste han lidt efter regnestykket til Kloge Hans, som regnede forkert. Hvad var der specielt ved Oscar Pfungst regnestykker? Vink: han var lidt af en fusker.

Elevopgave 5

Hvordan kan det være, at Kloge Hans, tilsyneladende var så dygtig til at regne, når den ikke lige frem blev narret?

Historien om Kloge Hans viser, hvor omhyggelig man skal være, når man designer dyreforsøg (herunder psykologiske forsøg, der involverer mennesker). Den har også haft den virkning, at det har været ualmindeligt svært at vinde gehør for undersøgelsesresultater, der påviser, at dyr kan tælle og/eller regne.

Som en lille krølle på historien kan jeg ikke dy mig for at anføre, at matematikundervisningen i gymnasiet den dag i dag ind i mellem har mindelser om Kloge Hans: eleverne er gode til at aflæse lærerens mimik. Et hævet øjenbryn, og de svarer det modsatte af det, de var i færd med. Et begyndende smil, og eleverne fremturer ad den vej, de er startet på. Lærerens dagsorden er logisk, elevernes psykologisk.

Men lad os vende tilbage til spørgsmålet om, hvor vidt dyr kan tælle og regne.[9] Man tager en sulten(det hjælper på rottens motivation) rotte (og det gjorde Francis Mechner i 1958) og placerer den i en lukket kasse med to pedaler A og B inde i kassen. Når rotten træder på pedal B kan den få en portion mad, ***hvis den vel at mærke har trampet det rigtige antal gange på pedal A forinden***. Hvor mange gange den skal træde på pedal A, indstilles af forsøgslederen.

Elevopgave 6

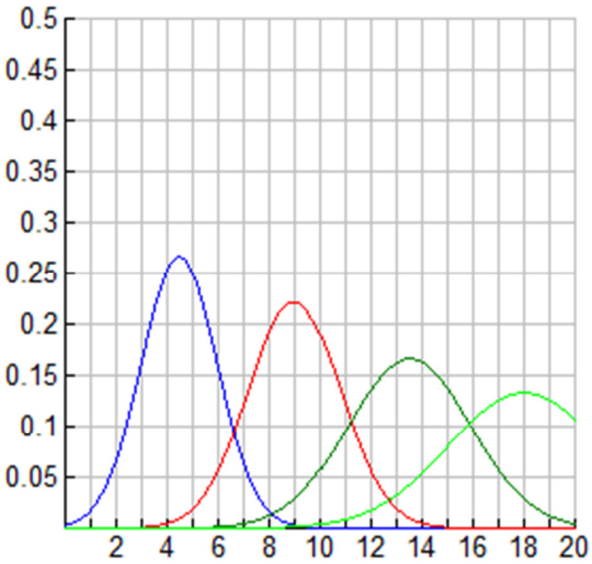
Kurverne nedenfor viser, hvordan forsøgsresultaterne fordelte sig ved et forsøg, hvor rotterne skulle trampe henholdsvis 4, 8, 12 eller 16 gange for at udløse belønningen.

Kan rotter tælle?

[9] Fortællingen om rotterne er baseret på et afsnit i Stanislas Dehaene: *The Number Sense – How the Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press 1997. Man kan Google sig frem til e-bogudgaven. Overskriften til afsnittet, ***Rat Accountants*** lader sig desværre ikke oversætte, uden at ordspillet går tabt. Inspirationen fra Dehaenes bog fornægter sig heller ikke i forbindelse med Kloge Hans og babyerne.

Det er let at svare ***nej*** på ovenstående spørgsmål. Rotterne er måske ikke vanvittigt gode, men kan de slet ikke tælle?

Hvis rotten trampede på pedal B, ***før*** den havde trampet tilstrækkeligt mange gange på pedal A, blev den straffet. Så kan den lære det! Fx ved at lyset i kassen blev slukket, eller ved at pedalsystemet blev låst, så rotten ikke kunne forsøge sig igen et stykke tid. Afspejles dette i kurverne nedenfor?



Som antydet kan man godt forsvare synspunktet, at rotterne må have en talfornemmelse, selv om den måske ikke er helt præcis. Men kunne man forestille sig, at det i virkeligheden var noget andet rotterne var gode til? Har du nogle forslag?

Elevopgave 7

En oplagt indvending ville være, at rotterne havde en indbygget tidsfornemmelse, så de vidste, hvor længe de skulle trampe, snarere end hvor mange gange.

Denne indvending kan afvises på en enkelt og elegant måde. Man sulter rotterne i rigtig lang tid og gentager forsøget. Det laver ikke om på rotternes træfsikkerhed.

Kan du regne ud, hvorfor det viser, at det ikke kan være tiden, der er afgørende for rotten?

(Svaret er selvfølgelig, at en sulten rotte tramper som død og helvede, så den ville skyde langt over målet, hvis den trampede et bestemt stykke tid).

Som bekendt er læring situeret, og måske lærte rotterne kun, at en trampedans med det rigtige antal trin udløste belønning? For at kunne tale om et egentlig talbegreb, må vi kunne påvise, at rotter, der har lært tallet 4 i en sammenhæng, kan genkende tallet 4 i andre sammenhænge.

Der er desværre ikke, så vidt jeg ved, udført særligt mange eksperimenter til at vurdere overførbarheden af tal lært af dyr i bestemte situationer. Men her er endnu et rotteforsøg. Man tager en sulten rotte (og det gjorde Church og Meck i 1983) og placerer den i en lukket kasse med to pedaler A og B inde i kassen. Så lærer man den, at hvis den hører 2 toner, er der mad, hvis den trykker på pedal A. Hvis den hører 4 toner er der mad, hvis den trykker på pedal B. Man lærer den samme rotte, at hvis den ser 2 lysglimt, er der mad ved A. Ved 4 lysglimt er der mad ved B.

Elevopgave 8

Man synkroniserer lysglimtene og tonerne, sådan at rotten ser to lysglimt, samtidig med at den hører to toner. Hvilken pedal, tror du, at rotten træder på?

Den træder faktisk på pedal B. Kan du forklare det?

Elevopgave 9

Det vil nok være at stramme den, at rotten udfører regnestykket $2 + 2 = 4$. Hvorfor egentlig?

Hvis en chimpanse får god tid og valget mellem en bakke med en bunke med 5 stykker chokolade og et enkelt stykke ved siden af og en bakke med en bunke med 3 stykker og en bunke med 4 stykker, vælger den sidste bakke. Hvorfor (er der andre muligheder)?

Elevopgave 10

Det lader til, at mange dyr har en eller anden form for talfornemmelse. Find argumenter for, at en ”talfornemmmelse” forbedrer forskellige dyrs overlevelseschance i naturen.

Hvad har ovenstående ekskursion til dyreriget med matematiks videnskabsteori at gøre? Traditionelt set ikke noget. Men artiklens forfatter synes alligevel, at den kaster mere lys over, hvad tal egentlig er, end den akademiske realismediskussion. Hvor man som filosof kan argumentere for, at hvis tallene eksisterer i en eller anden abstrakt forstand, er de forbandet svære at komme i kontakt med, har dyr et mere afslappet forhold til tallene. Og tilsyneladende ikke svært ved at komme i kontakt med dem.

Eller? Hvad er det egentlig forsøgene viser? Metodespørgsmål er centrale i forbindelse med de skitserede dyreforsøg i modsætning til den fuldstændigt påklistrede metodediskussion i AT. For en gangs skyld er den hypotetisk-deduktive metode ikke bare noget, man læser om, men vi benytter den i praksis. Og svagheden udstilles oven i købet: vi kan forkaste alternative hypoteser til den hypotese, vi ønsker at eftervise, men har vi overvejet alle alternativer?

Og så tjener ekskursionen også til at belyse sprogets betydning. Det vil vi nu se nærmere på. Selv hvis man som forfatteren er imponeret over dyrene, er deres talbegreb noget upræcist. Men hvad med mennesker? Hvordan kan det være, at vi ville få mad hver eneste gang, hvis vi skulle trampe 4 gange på en pedal, for at få det? Gælder det alle mennesker, uanset køn, alder og race?

Det er sjældent, at aviserne bringer stof af selvstændig matematikfaglig interesse, men da tidsskriftet ***Science*** offentliggjorde artiklen ***Life Without Numbers in the Amazon*** i sin onlineudgave 19/8 2004[10], gik der kun ganske få dage før ***Berlingske Tidende*** fulgte op med artiklen ***En plus en er cirka to*** 24/8 2004. Artiklen er tilgængelig på ***Infomedia***

Den lille indianerstamme pirahãerne består af cirka 200 individer, som lever i små landsbyer ved en biflod til Amazonfloden. Stammens sprog er på mange måder begrænset. Der er kun i alt 10 konsonanter og vokaler, sproget mangler som tidligere nævnt ord for farver, men mest interessant for os: talordforrådet er næsten ikkeeksisterende. Pirahãerne har ord for 1 og 2, and that's it![11] For at det ikke skal være løgn, bruges tallene for 1 og 2 noget sløset efter vores målestok.

Elevopgave 11

Sløsede tal findes også på dansk. I nogle sammenhænge betyder et par præcis to. I andre sammenhænge tager vi det ikke så tungt. Find selv på eksempler!

Set i lyset af Whorf-Saphir hypotesen, som går ud på, at sproget former vores begreber, snarere end at sproget sætter ord på vores begreber, kunne det være interessant at vide, om pirahãerne har en indbygget talfornemmelse på trods af deres åbenlyse mangel på talord.

Det var præcis det, Peter Gordon havde undersøgt i den undersøgelse, hvis resultater blev offentliggjort i ***Science***.[12]

Peter Gordon satte sig sammen med forsøgspersonen ved et bord. Bordet var delt af en pind på midten, og på den ene sides sad PG og stillede opgaverne. For eksempel lagde PG et antal walkmanbatterier på sin bordhalvdel, og indianeren skulle så løse opgaven ved at lægge præcis det samme antal batterier på sin bordhalvdel.

Peter Gordon varierede opgaven noget.[13] Vi har illustreret de forskellige versioner af opgaven på figuren nedenfor (opgaven stilles på venstre bordhalvdel, og det ønskede svar er angivet til højre).

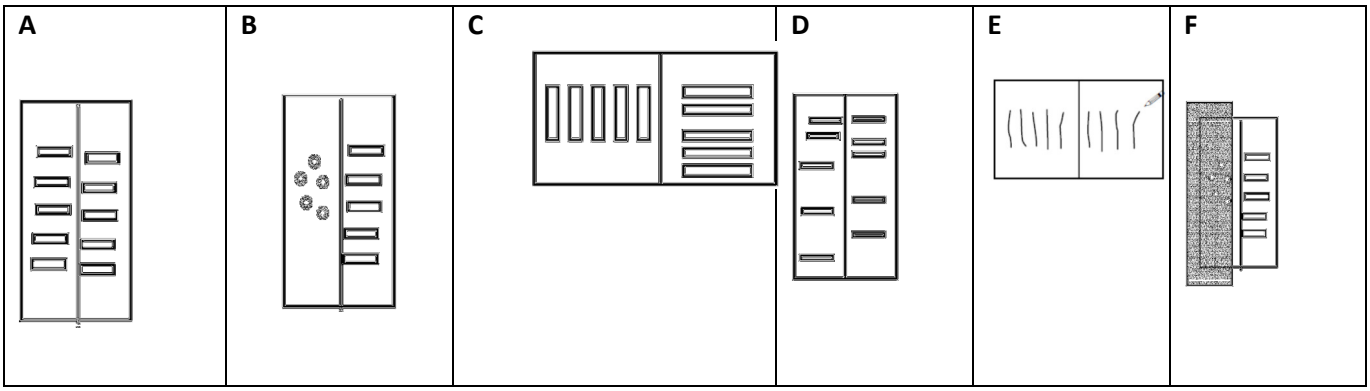
---

[10] Peter Gordon: *Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia*, Science vol. 306, 2004. http://www.sciencemag.org/cgi/reprint/306/5695/496.pdf

[11] Læs mere om sammenhæng mellem tal og sprog – fx om sprog, som opererer med et sæt talord, når det er fisk, der skal tælles, og et andet, når det er kanoer – i Sieghard Beller, Andrea Bender: The *Limits of Counting: Numerical Cognition Between Evolution and Culture,* Science vol. 319, 2008. http://www.sciencemag.org/cgi/reprint/319/5860/213.pdf

[12] Forsøgsskitserne er taget fra det supplerende materiale til Peter Gordons artikel, *Supporting Online Material*, www.sciencemag.org/cgi/content/full/1094492/DC1

[13] Det undrer mig, hvordan man sikrer sig, at indianeren forstår spørgsmålet, uden at man selv giver svaret. Og hvis man ikke gør det, risikerer man at give indianeren så få instrukser, at indianeren ikke forstår, hvad man vil have ham til.



Forsøg A er det, vi så på før. I ***forsøg B*** lægger PG et antal nødder op, men indianeren skal stadig svare med batterier. I ***forsøg C*** lægger PG batterierne på den anden led, men indianeren skal stadig svare på den gamle led. I ***forsøg D***, driller PG ved at lægge batterierne med forskellig afstand. I ***forsøg E*** er batterierne erstattet med blyantsstreger. Endelig er ***forsøg F*** en af variant af forsøg B, men PG skjuler nødderne, før indianeren skal svare.

Elevopgave 12

Hvad skal de forskellige varianter af forsøget gøre godt for, viser de ikke det samme?

Graferne, som illustrerer forsøgsresultaterne findes i Peter Gordon: *Numerical Cognition Without Words: Evidence from Amazonia*, Science vol. 306, 2004. Artiklen er tilgængelig online på adressen

http://www.sciencemag.org/cgi/reprint/306/5695/496.pdf

For at få adgang til artiklen skal du registreres, men det er gratis og tager kun et par minutter, og så har du adgang til spritnye forskningsresultater fra ***Science***. Og du kan svare på nedenstående spørgsmål vedrørende graferne.

Det antal, som indianerne skulle matche, er ud ad x-aksen. Procentdelen af rigtige svar er opad y-aksen. Vurdér ud fra resultaterne, om de deltagende indianere kan genkende antallet 4, når de ser det. Hvad med 2?

Forsøg D adskiller sig fra de andre. Hvordan? Har du en forklaring på, at indianerne klarer den tilsyneladende svære opgave så godt?

Du får nu en ekstra oplysning: pirahãer kan ikke tegne, så bare det at skulle tegne en lige streg fik dem til at jamre højlydt. Hvad viser indianernes resultater i forsøg E?

Elevopgave 13

Peter Gordons resultater gik verden rundt og blev af mange udlagt som, at nu havde man den endelige påvisning af den stærkeste version af Whorf-Saphir hypotesen: sproget er bestemmende for vores begrebsverden. Pirahãerne har ikke noget talbegreb, ***fordi*** de ikke har ord for tal, forlød det.

Der er en elementær logisk fejl i denne argumentation. Har Peter Gordons undersøgelser vist en *årsagssammenhæng?*[14]

Forskningen tyder på, at talordene er nødvendige for et eksakt talbegreb, når vi når op på tal større end to. Men det er vel ikke utænkeligt, at talordene er resultatet af et behov for at tælle, altså at sproget er en følge af begrebet, ikke omvendt. Hvorfor skulle man indføre talord, hvis ikke det var for at tælle? Er der i øvrigt ikke lidt hønen og æggene over problematikken?

I ***Berlingske Tidendes*** version blev det til:

Forskere har i Sydamerika fundet frem til en indianerstamme, der er totalt talblind. De kan kun tælle en, to, mange. Forskerne gør med deres undersøgelse op med teorien om, at mennesker har en medfødt sans for tal.

***En plus en er cirka to**, Berlingske Tidende 24/8 2004*

Det er nok at stramme den, al den stund at selv rotter har en medfødt sans for tal. Den er bare ikke særlig præcis for større tals vedkommende. Det samme gjaldt pirahãerne.

Elevopgave 14

Hvorfor tror du, at ***Berlingske Tidende*** bragte artiklen?

Tjek lige overskriften: ***En plus en er cirka to***. Er der belæg for den i Peter Gordons undersøgelse?

Det hører til vores børnelærdom, at $1 + 1 = 2$. Faktisk har ligningen været brugt til at bevise Guds eksistens. Beviset tager sit udgangspunkt i, at der findes evige sandheder som at $1 + 1 = 2$. Detaljerne overlades til læseren;) Men ***er*** $1 + 1 = 2$ en evig sandhed?

Der er faktisk noget, der tyder på det. Man tager en 4½ måned gammel baby (Det var lige præcis, hvad Karen Wynn gjorde)[15]. Så filmer man babyens reaktion på en lille dukketeaterforestilling i tre akter. I første akt kommer dukke 1 ind på scenen og bliver skjult bag en skærm. I anden akt accelererer handlingen: dukke 2 bliver ført ind bag skærmen. Tredje akt, som traditionelt er der, hvor intrigen opløses, findes i to versioner. I den ene går skærmen ned, og babyen ser to dukker. Det er den kedelige udgave af stykket. I den anden går skærmen ned, og nu tager stykket en overraskende drejning: der står kun én dukke tilbage på scenen. Babyen tror ikke sine egne øjne.

[14] Man kunne forestille sig, at de manglende ord og manglende begreber har en fælles årsag, nemlig et jungleliv, hvor man ikke har brug for eksakte størrelser, og derfor hverken udvikler ord eller begreber.

[15] Karen Wynn: *Addition and subtraction by human infants*. Nature vol. 358, 749-750, 1992.

Elevopgave 15

Babyerne så markant længere tid på den overraskende slutscene end på den kedelige. Hvad er din konklusion? Kan forsøgsresultatet forklares på andre måder, end at babyen ved, at $1 + 1 = 2$?

Der findes en omfattende litteratur om forholdet mellem tal og sprog. Nogle få er nævnt i fodnoterne. Men de er forholdsvis letlæste og forsynet med omfattende litteraturlister, hvoraf en del af referencerne er tilgængelig på nettet. Det er en spændende diskussion, som virkelig deler vandene. Og så er vi måske lige vidt i vores jagt på svarene på de store spørgsmål: hvad er tal og hvor er de henne? Men måske har vi fået svaret på nogle af de små undervejs?

Platons Timaios

Af Karen Thorsen

Indholdsfortegnelse:

Forord s. 34

Indledning s. 35

Platons idélære s. 35

Pythagoræerne s. 36

Proportionslæren s. 36

Timaios' fortælling om verdens skabelse s. 37

Oplæg til arbejde med Timaios s. 41

Arbejdsplan s. 41

Arbejdsspørgsmål s. 41

Katalog med forslag til arbejdstemaer s. 42

Litteraturliste s. 43

Forord

Myter og matematik

Der findes sikkert mennesker, der ikke kan fascineres af matematik.

Der findes mange mennesker, der ikke tror, at de kan fascineres af matematik.
Matematikundervisningen i skolen vægter ikke fascinationen højt; der gøres fra politisk hold en stor indsats for at få unge til at interessere sig for naturvidenskab, herunder matematik, og opskriften er overalt den samme: man mener, at hvis eleverne skal gøres interesserede i matematik, skal de opleve, at de kan bruge resultaterne i praksis. Fascinationen anses mest for at være for nørder.
Men hvad avler mest interesse for matematik: ved hjælp af en lineær model at finde ud af, at man kan spare 15 kroner om måneden ved at have en mobiltelefon *uden* abonnement i stedet for én *med*?[16] Eller at addere 1/7's periode med sig selv igen og igen og se, at de forunderligste mønstre viser sig indbygget i det (hellige) syvtal[17]?

Det er denne skribents opfattelse, at det ene ikke lever godt uden det andet, og siden der findes en del gymnasiemateriale om praktisk anvendelige matematiske modeller, følger her en gennemgang af en matematisk myte, der viser et fascinerende kosmos, der helt konsekvent er bygget op på matematiske strukturer.
Inden for teologien har man en tradition for at fastholde de forestillinger, som man godt ved ikke er sande i almindelig, objektiv forstand, men som ejer en slags eksistentiel sandhed, og som er uundværlige: mytens sandhed

Platons Timaios er en myte, der beretter om skabelsen af verden med matematiske strukturer som skelet. Matematikken er helt fra den første begyndelse et grundlæggende princip i opbygningen af universet og dermed også i mennesket, og den eneste grund til, at vi kan erkende vor omverden, er, at vi har de matematiske strukturer tilfælles med den. Vi kan jo nemlig ikke erkende noget, som vi intet har tilfælles med. At beskæftige sig med matematik bliver derfor at udforske universet

Hvor absurd det end kan virke at forestille sig, at den matematik, tonerækken bygger på, samtidig ligger til grund for planeternes bevægelser (absurd – og også forkert, har det vist sig), eller at alt stof er opbygget af bittesmå regulære mangeflader[18] i atomstørrelse (det er imidlertid kun delvist forkert), så rejser den konsekvent gennemtænkte og smukt billedligt fortalte myte spørgsmålet: jamen når det nu ikke er sådan, hvordan er det så? Hvis tallene ikke er indbygget i naturen, hvorfor lærer vi dem da ved at betragte naturen (ét træ, to træer, tre træer…)? Hvordan kan vi skelne kategorier fra hinanden, hvis vi ikke i os har en indbygget forståelse af, hvad "det samme" og "det

[16] For slet ikke at tale om de utallige eksamensopgaver, hvor man ved hjælp af tal i et skema skal afgøre om bløddyr vokser eksponentielt eller ifølge potensvækst
[17] Læg 142857 sammen med sig selv og skriv resultaterne ned.
[18] "Mangeflade" er en fordanskning af det græske ord polyeder; fordanskningen skyldes behovet for senere at kunne beskæftige sig med de specifikke flader uden at kende de græske talord.

forskellige" er, som Platon hævder. Kan vi overhovedet være sikre på, at matematikken er anvendelig på virkeligheden?[19]

Arbejde med myte og matematik i gymnasiet

Matematiklærere er ikke uddannet til at læse myter. Religions- og oldtidskundskabslærere kan oftest ikke læse matematiske formler. AT giver os mulighed for at arbejde sammen, og derfor kan vi nu finde et skrift frem, som har været glemt i mange år, - men som i hele middelalderen og langt op i renæssancen havde en særdeles stærk indflydelse på europæisk verdensforståelse.[20]

Timaios er svær at læse. Selv om denne fremstilling tilbyder en genfortælling, der er lidt enklere end teksten selv, vil man sikkert først kunne bruge den i 3G, - evt. i slutningen af 2G.

I det følgende præsenteres nogle *indledende oplysninger*, dernæst en *genfortælling* af de relevante dele af Platons tekst. Hertil kommer denne forfatters bud på *arbejdsspørgsmål*, der forhåbentlig kan fremme forståelsen og hjælpe til med at strukturere diskussionerne.
Der følger et *idékatalog* med områder, som man kan fordybe sig i, samt en liste med henvisning til *litteratur*, på papir og skærm.

Indledning

Platons idélære

"Alting flyder", sagde Heraklit (ca. 500 f.Kr.) og mente dermed, at alt er i konstant forandring. Man kan ikke bade to gange i den samme flod, - flodens vand er skiftet ud, og mennesket er også i konstant forandring.
Denne tilsyneladende indlysende sandhed beror imidlertid på et bedrag, mente Parmenides (ca. samtidig med Heraklit, nok lidt yngre), thi forandring er slet ikke mulig. Hvis nemlig noget skal forandre sig, må noget værende blive ikke-værende og noget ikke-værende blive værende. Og det strider imod fornuften, thi om det ikke-værende kan man intet vide og derfor slet ikke bygge en filosofi derpå. Heraklits foranderlige verden er således et bedrag.
Platon løser den tilsyneladende uløselige modsætning ved at skelne mellem på den ene side det værende, som altid er til, og hvor ingen forandring er mulig og på den anden side det, der uafladelig bliver til og ikke har egentlig væren.
Det værende, også kendt som ideernes verden, erkendes med tanken gennem logisk ræsonnement, det tilblivende/foranderlige, dvs. den verden, vi ser for os hver dag, fornemmes med sanserne; den synlige verden med dens kaotiske omskiftelighed er således blot en forestilling, et billede af den egentligt værende, ordnede verden, og vi kan kun sanse, ikke erkende billedet.

[19] Se også Jørgen Ebbesens artikel her: Rotter og indianere. Og kloge Hans.
[20] Der er nævnt flere temaer i og omstændigheder omkring Timaios' receptionshistorie i den udvidede litteraturliste.

I skriftet "Timaios" lader Platon den syditaliske naturfilosof Timaios fortælle om, hvorledes den synlige verden er blevet til som billede af ideernes evige verden[21].

Pythagoræerne

Alt er tal, menes Pythagoras (570-495f.Kr.) at have sagt.
Ifølge pythagoræernes verdensopfattelse er universet opbygget af bittesmå, udelelige enheder med en vis (meget lille) udstrækning. Disse enheder kunne naturligvis tælles, - hvis man altså kunne se dem.
Skønhed opstår, når man sætter ting sammen, hvis antal enheder passer smukt til hinanden, dvs. hvis forhold kan beskrives ved en brøk med små tal i tæller og nævner. Der er skønhed og harmoni mellem to toner, hvis strengelængderne forholder sig til hinanden som 2:1, som 3:2 eller 4:3. Et smukt bygningsværk bygges, hvis man sørger for, at der er samme pæne talforhold mellem f.eks. taghøjde og bygningens højde.
Udforskningen af tallenes egenskaber er studier i universets harmoni, matematik er dyrkelse af skønhed og planmæssighed og i sidste ende det guddommelige, der står bag.

Proportionslæren

Pythagoræernes verdensorden var sikret ved, at alt (i princippet) kunne tælles og dermed sammenlignes: dette var større end hint, - dén streng var lige så lang som dén og ville derfor give samme tone fra sig.
Imidlertid gik ordenen i stykker, da man opdagede, at der fandtes tal, man ikke kunne tælle og dermed forekomster, man ikke kunne sammenligne.
Lad os sige, at vi har to liniestykker og en enhed:

___|___|___|___ ___|___|___ ___

l_1 l_2 enhed

l_1 måler 4 enheder, når l_2 måler 3

Lad os nu tage to tilfældige liniestykker:

_____ _____

l_3 l_4

Man skulle tro, at man altid kunne finde en enhed, der var lille nok til, at man kunne gøre det samme som ovenfor, - sige, at den ene måler f.eks. 479, når den anden måler 385. Pythagoræerne troede det i al fald, - hele deres verdensopfattelse byggede herpå.
Men det kan bevises, at det ikke er tilfældet. F.eks. kan siderne i et kvadrat og diagonalen i samme kvadrat, umuligt måles med samme enhed, uanset hvor lille man gør den.

[21] I streng, litterær forstand er der ikke tale om en myte, eftersom den har en forfatter. Beretningen rummer imidlertid så mange fælles træk med myten, at vi her tillader os at betragte den som en sådan.

Denne opdagelse var rystende for mennesker, hvis fortrøstning til verdensordenen byggede på, at alt bestod af bittesmå enheder, der kunne tælles og dermed forstås. Det var så rystende, at det siges, at man holdt opdagelsen hemmelig og druknede en matematiker, der var kommet til at røbe den. Hemmeligheden holdt ikke; Eudoxos (408-355) kendte problemet og løste det, - eller kom i al fald om ved det med sin lære om proportioner:
Han siger, at man kan sammenligne to størrelser, hvis det giver mening at sige, at den ene er større end den anden (: man kan ikke sammenligne en cirkel og en linie, - eller Rundetårn og et tordenskrald), med andre ord, hvis de to størrelser er af samme art. Det, der kan sammenlignes, kan sammenlignes uanset, om det er fællesmåleligt (kommensurabelt) eller ej. Man kan se, om den ene er større end den anden, og man kan regne på inkommensurable størrelser. I stedet for at regne med tal, og med længde/areal/rumfang, der jo må udtrykkes i tal, kan man arbejde med forhold.
Selv om alt ikke kan tælles, kan man alligevel beregne og sammenligne størrelser i omverdenen og således rubricere og systematisere omverdenen. Ordenen er vendt tilbage.
Proportioner blev grækernes måde at skabe orden på. Templerne byggedes efter kunstfærdige beregninger, f.eks.:

$$\frac{triglyf}{metope} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{søjlernes\ nedre\ diameter}{søjlemellemrum} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{søjlehallens\ bredde}{cellas\ bredde} = \frac{1}{3}$$

Pythagoræernes sikkerhed for orden var ødelagt, et nyt var trådt i stedet. Proportionerne binder universet sammen.

Timaios' fortælling om verdens skabelse.

Den synlige verden er bygget af Den store Håndværker som en model af den evigt værende verden.

Håndværkeren overtager noget synligt stof, som bevæger sig kaotisk omkring. Det bringer han i sin godhed orden i efter fornuftens matematiske principper:
Han bygger først de fire elementer, ild, jord, luft og vand, således at hvert element består af bittesmå bestanddele med hver sin form, - ildens mindste bestanddel er den regulære fireflade, jordens den regulære seksflade, luftens den regulære otteflade og endelig er vandets mindste bestanddel den regulære tyveflade.
De fire elementer benytter han til at bygge verden af: ild (så den er synlig) og jord (så man kan røre ved den.). De to er ikke nok, de må bindes sammen, så alt ikke igen opløser sig i kaotiske former. Da vi har at gøre med rum, må der to mellemformer til; vi får således:

Verden består af ild, jord, luft og vand i følgende forhold:

$$\frac{jord}{vand} = \frac{vand}{luft} = \frac{luft}{ild}$$

De fire danner en enhed, fordi de forholder sig ens til hinanden, og derfor kan de ikke igen opløses og blive til kaos, - som mennesker kan, ved sygdom og død.
Verden er for evigt ordnet harmonisk.
Derfor må verden også have den mest harmoniske form, kuglens. Kuglen har nemlig samme afstand til centrum overalt, og det samme og harmoniske er mere fuldkomment end det forskellige og kaotiske. Kuglen er glat og har ingen åbninger, for selv om verden er levende, behøver den, modsat menneskene, ingen næring udefra, - og der findes heller ikke noget uden for verden, for Den store Håndværker har struktureret og bygget af alt det materiale, der var. Kuglen har heller ikke brug for hænder og arme at gribe med, for der er intet at gribe, eller ben at gå på, for der er ingen steder at gå hen. Kuglens eneste bevægelse er den mest harmoniske af alle bevægelser: den roterer om sig selv.

I kuglens centrum anbringer Håndværkeren verdenssjælen.
Verdenssjælen er verdens herskerinde, fordi sjælen er sæde for fornuften. Eftersom orden og harmoni er evigt til stede i verden, som Håndværkeren har bygget den, må fornuften, den guddommelige skaberkraft, også være det. Og fornuften kan ikke bo i legemet, men må bo i en sjæl. Altså har verden en sjæl, og den er konstrueret således:

Udelelig og ens væren
Delelig og legemlig væren
} blandes til En Tredje Slags Væren

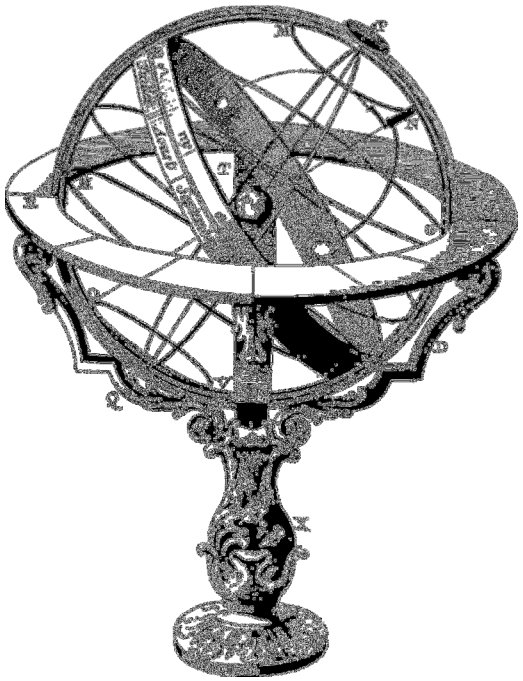
Udelelig og ens lighed
Delelig og legemlig lighed
} blandes til En Tredje Slags Lighed

Udelelig og ens forskellighed
Delelig og legemlig forskellighed
} blandes til En Tredje Slags Forskellighed

De tre blandinger blander han igen sammen til et hele, sjælsstoffet.

Stoffet har form som et langt bånd, og det deler han i mange intervaller, først efter dobbelte og tredobbelte rækker (1, 2, 4, 8 og 1, 3, 9, 27), dernæst underdeler han de intervaller efter proportionale regler og opnår derved til sidst de intervaller, som skaber tonerækken.
Efter således at have opdelt verdenssjælen i harmoniske stykker river han båndet over på langs, lægger de to dele over kors som et X og føjer enderne sammen, således at der bliver to kredse.

Den ene gør han til den ydre ring, - den er fiksstjernernes omløbsbane, og den går mod højre; den kaldes ”Det Samme”’s bevægelse, fordi fiksstjernerne bevæger sig ens. Den anden kreds bliver den indre ring, og den er planeternes bevægelse; de bevæger sig mod venstre, - og ikke i ensartet bevægelse, hvorfor denne ring kaldes ”det forskellige”.



En armillarsfære

”Det Forskellige”’s ring 7-deles ved intervallerne 1 – 2 – 3 – 4 – 9 – 8 – 27. I tre af disse kredse sker bevægelsen med samme hastighed, i de øvrige fire med forskellig hastighed, men dog med hastigheder, hvis forhold kan beskrives ved små, hele tal..
”Det Samme”’s ring har forrang, fordi den er enkel og udelt, ligesom fornuften er det, - i modsætning til sanserne.

Verdens legeme og verdens sjæl føjes nu sammen: Håndværkeren lægger den kugleformede verdenskrops centrum sammen med centrum for verdenssjælens baner og fletter dernæst legeme og sjæl sammen overalt, således at sjælen gennemsyrer alt og også svøbes uden om verdenskuglen som en skal.
Det er verdenssjælens væsen at rotere. Hver gang, den kommer i berøring med noget, meddeler den, - lydløst, uden tale - hvad dette noget er det samme som eller forskelligt fra. Det gælder, hvad enten ”Det Samme”’s cirkel berører noget evigt værende (da opstår fornuftsbaseret viden), eller det forskelliges cirkel berører noget foranderligt (da opstår sikre og sande meninger om det sanselige). Fordi cirklerne er fuldkomne og aldrig bringes i uorden, er verdenssjælens kundskaber altid sande.

Den store Håndværker glædede sig over sin verden; men fordi godheden er hans væsen, ville han gøre den endnu skønnere: Håndværkerens forbillede var en evig verden. Også på dette punkt måtte den skabte verden ligne forbilledet, blot mindre fuldkomment: Håndværkeren skabte tiden som et

billede af evigheden. Det skete ved, at han skabte himmellegemerne og indsatte dem i de cirkler, der passede til dem: sol, måne, 5 andre stjerner, - dvs. planeterne, himmelhvælvingens vagabonder, sattes i "Det Forskellige"'s bane, og således indførtes dag og nat, måneder og år. Solen er vigtigst, fordi dens tidsenhed er mindst, døgnet. Med døgnet som regneenhed kan man lære at beregne de andre enheder (måneder, år samt mere komplicerede astronomiske beregninger). Solen giver mennesker talsystemet.

Fire slags levende væsener bebor dette univers: i himlen, der består af ild: guder, - dvs. planeterne, fiksstjernerne samt hvad der ellers måtte findes af guder. Hertil fuglene i luften, vanddyrene samt de, der går på fødder på det tørre land.

Resten af arbejdet må Den store Håndværker overlade til de mindre guder, som han lige har skabt, både dem, der løber i kreds (fiksstjerner og planeter) og dem, der kun åbenbarer sig af og til, - de guder, som vi normalt kalder guder.
Nu skal de dødelige skabes, - planter, dyr og mennesker, thi uden dem ville verden ikke være fuldkommen, dvs. rumme alle arter. Det kan Håndværkeren ikke gøre alene, for han kan kun skabe evige, udødelige væsener.
Han tager resterne af det stof, verdenssjælen var lavet af, fortynder det for at få nok og deler det derefter omhyggeligt mellem hver gud, der således får materiale til netop én sjæl. Sjælen er nu hos sin gud, og Håndværkeren viser den universets natur og belærer den om skæbnens love: Sjælene skal snart fødes for første gang, og alle fødes som gudfrygtige og retskafne mennesker, - alle sjæle får samme udgangspunkt, men de bliver ikke ens: de bedre fødes som mænd, de ringere som kvinder.
Guderne låner lidt ild, jord, vand og luft. Disse dele sammenføjer de med en mængde små, usynlige nagler, ikke med proportionens uløselige bånd, til det menneskelige legeme. Legemets facon er kun delvist kugleformet, - og kuglen er endda ikke glat, men har åbninger og udposninger. Den udødelige del af sjælen bor i den kugleformede del af legemet; den dødelige sjæl, som de lavere guder tilføjede, anbragte de i kroppen, - den udvækst, som det mindre fuldkomne væsen behøver for at kunne gribe ud, bevæge sig omkring osv.
I dette legeme indespærrer guderne den udødelige sjæls harmoniske cirkler. Men hvor verdens legeme var bragt i orden, før sjælen blev anbragt der, er legemet kaotisk, og det er sjælens opgave med fornuftens hjælp at bekæmpe legemets kaos: planløse bevægelser, tilfældige berøringer med andre væsener og de stærke fornemmelser, som det afføder: begær, vrede, glæde, - alt sammen Det Forskelliges urolige bevægelser, der forstyrrer og bringer uorden i Det Sammes rolige rotation.
Sjælens opgave er at genetablere Det Sammes rolige, fornuftige bevægelser og derved også kontrollere Det Forskelliges bevægelser. Opgaven kan løses: via sit slægtskab med verdenssjælen kan den enkelte sjæl erkende universet/altet og er altså i stand til at hæve sig over den tilsyneladende verdens kaotiske bevægelser og fornemmelser og således bringe orden i det lille univers, som et menneske er.
Lykkes det, kan sjælen, når det givne liv er levet, og ild, jord, luft og vand skal afleveres igen, vende tilbage til sin stjernefælle og der leve i lykkelig evighed, - lykkes det ikke, må den blive en kvinde eller endog et dyr ved sin(e) næste fødsel(er).

Oplæg til arbejde med Timaios:

Arbejdsplan:

Selv om der er givet en genfortælling, er dette ikke let stof, og det vil sikkert kun give mening at arbejde med det i 3 G, evt. i slutningen af 2G i en god klasse; måske kan en matematikerklasse afslutte faget oldtidskundskab med at arbejde med dette tema; det skulle være muligt at læse Platons egen tekst efter grundigt forarbejde.

Man kan forestille sig en indledende læsning af genfortællingen med almindelige tekstlæsningsmetoder (referat, spørgsmål til tid og sted, genre, tekstens intention osv.osv.).

Herefter vil der utvivlsomt være mange dunkle punkter. Disse kunne oplyses på den måde, at nogle elever påtog sig at orientere om proportionslæren, nogle om de platoniske legemer, nogle om middeltal osv. En forståelse af disse matematiske emner skulle lette læsningen af teksten, således at man i anden omgang kan læse i dybden og sluttelig læse dele af Platons egen tekst.

Arbejdsspørgsmål:

1. Spørgsmål, der sigter mod forståelse af teksten:

Da teksten er fremmedartet, bør man begynde sit arbejde med den med at gennemgå selve handlingsgangen ret udførligt, enten skriftligt eller i samtaleform.

Hvad skabes der af? Hvad skabes der med?
Med andre ord: skabelse består i at etablere ønskværdige tilstande ud af noget problematisk. Hvad er det problematiske? Hvad er det ønskværdige?

Bygning af verdenssjælen har tæt sammenhæng med den antikke verdens kosmologi.
Undersøg, hvad fiksstjerner og planeter er, og hvordan man mente, at de bevægede sig.
Banerne kan illustreres i armillarsfæren, s. 39.

Hvad betyder det, at himmellegemernes bevægelser forløber langs baner, der er inddelt efter tonerækken?
(Man talte i oldtiden om ” sfærernes musik”: i universet er der bestandig skøn musik, - vi hører den blot ikke, fordi vi har vænnet os til den. Platon nævner den ikke her, men den kan være underforstået).

Hvorfor er det fuldkomment ikke at behøve næring udefra (jordens legeme), mindre fuldkomment at have brug for det (menneskets legeme)?

Er det forståeligt at opfatte tiden som et afbillede af evigheden?

Hvad er årsagen til / formålet med, at verden er blevet til?

Hvad betyder det, at der er et formål?
(Vi opererer i vore dage med et naturvidenskabeligt årsagsbegreb (hvad er det?).
I oldtiden havde man flere opfattelser af årsagsbegrebet; således har Aristoteles, som er lidt senere end Platon, fire årsager. Platons vigtigste årsagsbegreb er det såkaldt *teleologiske*: årsag = formål. Vi møder det i vore dage vist kun i populærbiologien i ræsonnementer som: myreslugeren har sin tunge, for *at* den bedre kan fange myrer; en naturvidenskabelig årsagsforklaring ville her være: myreslugeren har overlevet, fordi den havde udviklet den lange, praktiske tunge).

Prøv at beskrive en almindelig dag i jeres liv ud fra Timaios' verdensbillede: hvordan skal de forskellige, helt banale situationer som at skændes med sin lillebror, købe et par sko og læse hhv. undervise i matematik forstås?

2. Spørgsmål vedrørende erkendelsesteori, herunder matematik.

Den senantikke filosof Proclus (400-tallet e.Kr.) siger, at al kundskab opnås ved lighed mellem den erkendende og det erkendte. Med andre ord: man kan ikke forstå det, man ikke er en del af. Overvej, om det er rigtigt.
Hvis det er rigtigt, hvad betyder det så, at verdens- og dermed menneskesjælen er bygget op af begreber som deleligt/udeleligt, lighed/forskellighed?
Hvad hvis det er rigtigt, men menneskesjælen ikke er bygget af disse begreber?

Kan man drive naturvidenskab efter Parmenides' opfattelse? Efter Platons?

Matematikken er en central del af den evige fornuft, - og den er samtidig indbygget i verden (planeternes baner og dermed verdenssjælen, solens omløbstid).
Kan vi forstå matematik, hvis det ikke er rigtigt, at den er indbygget i os?
Kan vi anvende matematik på verden, hvis det ikke er rigtigt, at den er indbygget i verden?
I givet fald hvordan?

Katalog med forslag til arbejdstemaer:

- *Eudoxos' proportionslære* med udblik til Dedekind-snit og de reelle tal.
- *De regulære polyedre* med udblik til beviset for, at der ikke findes flere.
- harmoniske og geometriske - evt. flere - *middeltal*, - kan videreudvikles til talfølger og –rækker, eller man kan dreje arbejdet mere i retning af matematik musikteori.
- al *pythagoræisk matematik* vil i og for sig være relevant, idet den belyser pythagoræernes opfattelse af, hvorledes matematikken og universet hang sammen.
- *Timaios' betydning* i europæisk videnskabshistorie.

Der kræves i AT ikke nødvendigvis matematik på A-niveau, selv om eleven har dette. En del af de angivne emner kan dog komme op på et pænt niveau.

Litteraturliste
.. og et par kommentarer:

Tekster:
Platon: Timaios. 8. bind i Høeg/Ræders udgave "Platons skrifter i oversættelse" fra 1940.
En ny oversættelse er på vej, forventes i slutningen af 2012, i Tortzen og Mejers udgave af Platons skrifter.

Euklid:Elementer I-IV, oversat af Thyra Eibe. Seneste udgave: 1985.
Tilgængelig i engelsk version på nettet: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

Kommentarer til Timaios:

Cornford: Plato's Cosmology. Oxford 1937.
Titlen anføres for en ordens skyld, skønt bogen alene har filologisk og ikke matematisk interesse.

Pythagoræisk matematik generelt:

Clausen & Falkesgaard: Tal og tanke. Munksgaard 1986. En absolut elevvenlig indføring i pythagoræisk matematik med mange eksempler og opgaver. Anvendelig på alle klassetrin.

Proportionslæren:

Euklid, bog V, rummer proportionslæren

http://www.imada.sdu.dk/~btoft/mathist/Lutzen.pdf
Jesper Lützen gennemgår den antikke proportionslære. Kan læses af gode elever.

Howard Stein: Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. Synthese, bind 84, 2, s. 163-211. Artiklen er tilgængelig her:
http://www.springerlink.com/content/h469818823516p63/
Videnskabelig artikel

Proportionslæren var massivt til stede i græsk arkitektur. Herom følgende to henvisninger:

Pedersen, Linda Søndergaard: Tholos i Delfi. Samtiden Anbefalet, Klassikerforeningens Kildehæfter, 2005.

http://www.mlahanas.de/Greeks/Arts/GreekTemple.htm
Fokuserer man på Apollon-templet i Didyma, findes konkrete mål, som man kan regne på, her:
http://www.perseus.tufts.edu/hopper/artifact?name=Didyma,+Hellenistic+Temple+of+Apollo&object=Building

De regulære polyedre alias de platoniske legemer:

Euklid XIII rummer konstruktionen af de regulære polyedre.

http://www.henrikkragh.dk/pdf/NoterRegPoly200106a.pdf
Et sæt noter til især polyedrenes geometri, men også til øvrige matematiske problemer i Timaios. De kan med lidt hjælp anvendes af elever.

Undervisningsmateriale, lige til at gå til, også med Eulers polyedersætning og med yderligere henvisninger, findes her:
www.sctknud-gym.dk/lrere/AM/Matematik/.../Polygoner&**polyedre**.docx

Middeltal og harmonilære:

En kort og elevvenlig indføring findes her:
homepage.svendborg-gym.dk/rl2/index.php?download...pdf

Archytas var den græske foregangsmatematiker på dette område. En udførlig oversigt over hans liv og virke, forså vidt som det kendes, gives her:
http://plato.stanford.edu/entries/archytas/ .
Især afsnit 2.2 er relevant
Stanford-artiklerne er hurtige oversigtsartikler, som sammenfatter relevant forskning. Det kan læses af lærere, undtagelsesvis og i mindre portioner af (gode) elever.

Sundberg, Ove Kr.: Pythagoras os de tonende tall. Oslo 1980.
En bog til inspiration for den lærer, der arbejder med musik og harmoni og filosofi

Carstensen, Jens og Petersen, Palle Bak: Uligheder. Eget forlag, 2003
Et afsnit heri behandler de forskellige middeltal. En bog for læreren og den særligt interesserede elev.

Carstensen, Jens: Talfølger og rækker. Systime 2008. Dele findes som e-bog. Kan læses af gode elever.

Timaios' betydning i europæisk historie

Timaios var den eneste af Platons dialoger, der var kendt i Europa indtil renæssancen. Dens betydning for middelalderens *kosmologi* kan dårligt overvurderes, men langt ind i renæssancen var Timaios stadig central:
Her vil jeg blot til illustration anføre nogle adresser, hvor man kan læse om dialogens indflydelse på Johannes Kepler (1571-1630):
http://www.lemvig-gym.dk/astrofilo/k-historie.htm
http://facultyweb.berry.edu/ttimberlake/copernican/
http://facultyweb.berry.edu/ttimberlake/copernican/pdf/activities/Mysterium.pdf
http://en.wikipedia.org/wiki/Mysterium_Cosmographicum
http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/kepler.html

Også den opfattelse af *legeme og sjæl*, som var herskende i kirken, - og vel stadig er det i Europa i dag – skriver sig i høj grad tilbage til Platon, ikke mindst, som han fortolkedes i nyplatonismen. Det er utvivlsomt for komplekst til et gymnasieprojekt. Det skal nævnes, at der ser ud til at være fornyet interesse for Timaios efter årtusindskiftet; der har således været afholdt flere store forsknings-seminarer, og der er udgivet litteratur herom.

Endelig gælder, at selv om den platoniske opfattelse af *matematikkens genstand*: at matematikkens genstand faktisk eksisterer, og at matematisk forskning består i lidt efter lidt at opdage den, - selv om den opfattelse af de fleste er dømt ude, har det vist sig vanskeligt at undvære den, - endsige stille noget i stedet.
Den amerikanske matematikfilosof, Reuben Hersh, siger således:

"The working mathematician is a Platonist on weekdays, a formalist on weekends. On weekdays, when doing mathematics, he's a Platonist, convinced he's dealing with an objective reality whose properties he's trying to determine. On weekends, if challenged to give a philosophical account of this reality, it's easiest to pretend he doesn't believe in it. He plays formalist, and pretends mathematics is a meaningless game."

Reuben Hersh: What is Mathematics, Really, London 1997, s. 39f.

Om brugen af matematiske tegn og objekter i en god matematisk fremstilling

af Petur Birgir Petersen

Et særpræg ved matematik som videnskab er den udstrakte brug af symboler. Det er vigtigt at symbolerne anvendes på en klar og meningsfyldt måde, således at den matematiske tekst bliver klar og sammenhængende. Formålet med denne artikel er at skærpe opmærksomheden omkring en klar og sammenhængende brug af matematiske tegn og objekter i en skriftlig eller mundtlig fremstilling af matematik. Artiklen vil kunne anvendes i forbindelse med et kort forløb om god matematisk stil fra anden halvdel af 1.g og fremefter.

Åbne og lukkede udtryk og udsagn.

Ved *lukkede udsagn* forstås sammenstillinger af ord eller symboler, som udtrykker en påstand, som kan være *sand* eller *falsk*.

Eksempel 1:

I 2009 var der færre færinger end danskere.

Danmark er en by i Sverige.

$2+2=4$.

$2+2=5$.

Udsagnet $2+2=4$, der er *sandt*, består dels af de to lukkede *udtryk* eller *navne* $2+2$ og 4, dels af lighedstegnet, der forbinder de to udtryk.

Specielt for matematikken er dens brug af *variable*, som er symboler, der repræsenterer flere navne på en gang. For eksempel kan vi lade x, y, eller z repræsentere et vilkårligt reelt tal. Bemærk at variable altid skrives i kursiv, når man benytter elektronisk tekstbehandling. Ved indføring af variable i udtryk og udsagn fremkommer *åbne udtryk* og *åbne udsagn*.

Eksempel på et åbent udtryk: $2x+3$.

Eksempel på et åbent udsagn: $2x+3=5$.

For at opnå generelle resultater anvender man også en anden type variabel, som kaldes *arbitrære konstanter*. Idéen er, at de arbitrære konstanter kan vælges tilfældigt, men at de derefter ikke ændrer sig. Arbitrære konstanter betegnes oftest med de første bogstaver i alfabetet (i *kursiv*).

Eksempel 2: Ligningen for en ret linje, som ikke er parallel med *y*-aksen er: $y=ax+b$.

Her er *a* og *b* arbitrære konstanter, hvor *a* kaldes hældningstallet og *b* er skæringen med *y*-aksen. Punkterne på linjen er så givet ved koordinaterne (x,y), hvor *x* og *y* er valgt således, at ligningen er et sandt udsagn. Man siger at *x* er en *uafhængig* (eller *fri*) variabel, og *y* er en afhængig variabel, idet *y* afhænger af værdien af *x*. I eksemplet $y=2x+3$ har vi fastsat konstanterne til $a=2$ og $b=3$. Et punkt på den linje, som ligningen repræsenterer, er f.eks. punktet med *koordinaterne* $(1,5)$, idet $5=2\cdot 1+3$ er et sandt udsagn.

Opgave 1: Undersøg om punktet med koordinaterne (3,7) ligger på linjen givet ved ligningen $y=2x+3$, og angiv en metode til at beregne koordinater til punkter på linien.

Hvis man arbejder med så mange variable, at bogstaverne i alfabetet inklusive de græske har svært ved at slå til, kan man *indeksere*. Det betyder at man indfører en nummerering bag ved bogstaverne med *sænket skrift*. Hvis man f.eks. arbejder med ligningerne for to linjer, kan man skrive disse således:

$$y=a_1x+b_1$$

$$y=a_2x+b_2$$

Her udtales a_2 således: ”a to” og ikke ”a i anden”.

Opgave 2: Find skæringspunktet mellem linjerne givet ved ligningerne

$$y=2x-3$$

$$y=4x+5$$

Kontrollér om indsættelse af de fundne værdier for *x* og *y* gør begge ligningerne i ligningssystemet til sande udsagn.

Generalisér løsningsmetoden ved at udlede en formel, der for $a_1 \neq a_2$ udtrykker koordinaterne til skæringspunktet (x, y) mellem linjerne givet ved ligningerne $y = a_1 x + b_1$ og $y = a_2 x + b_2$ ved de arbitrære konstanter a_1 , a_2 , b_1 , b_2 . Kontrollér formlen ved at anvende den på det ovenstående ligningssystem.

Nogle matematiske tegn og objekter.

Her vil vi specielt omtale tre typer objekter:

- *Tal* - som i denne sammenhæng generaliseres til også at omfatte åbne udtryk såsom

$$2x + 3$$

- *udsagn* (som bl.a. omfatter ligninger og uligheder)
- *mængder* - såsom mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal, eller mængden {1, 2, 3}, der indeholder *elementerne* 1, 2 og 3

Disse tre typer objekter kan hver især forbindes med ganske bestemte tegn. Her følger et skema, der viser nogle af mulighederne. Idéen er, at man *enten* forbinder tal *eller* udsagn *eller* mængder, og ikke sammenblander forskellige typer objekter. Endvidere skal man holde sig til den type objekt, som man nu arbejder med.

Objekt	Kan forbindes med følgende tegn
Tal	$=$ $\neq$ $<$ $\leq$ $>$ $\geq$
Udsagn	$\Rightarrow$ $\Leftarrow$ $\Leftrightarrow$ $\wedge$ $\vee$
Mængder	$\cup$ $\cap$ $\subset$ $\subseteq$ $\supset$ $\supseteq$ $\not\subset$ $\setminus$

Således er det eksempelvis ikke tilladt at skrive $(a+b)^2-2ab \Leftrightarrow a^2+b^2$, fordi $(a+b)^2-2ab$ ikke er et udsagn. I stedet skal man skrive $(a+b)^2-2ab=a^2+b^2$ eftersom objekterne $(a+b)^2-2ab$ og a^2+b^2 er udtryk, der repræsenterer tal.

Et andet eksempel er løsning af ligningen $2x+3=5$. Dette er en *ligning* fordi objektet indeholder en venstreside og en højreside, som er forbundet med et lighedstegn. Ligningen er samtidig et åbent udsagn på grund af den variable *x*. At løse ligningen er at finde de værdier for *x*, der gør udsagnet sandt. Dette kan vi gøre ved hjælp af de velkendte omformningsregler:

Ligningen er $2x+3=5$.

Vi trækker 3 fra på begge sider af lighedstegnet og får:

$$2x=2$$

Derefter dividerer vi med 2 på begge sider, og får:

$$x=1$$

Denne argumentation kunne også opstilles klart uden brug af tekst således:

$$2x+3=5$$

$$2x=5-3$$

$$x=\frac{2}{2}$$

$$x=1$$

Det vil være korrekt, men ikke nødvendigt at forbinde ligningerne med dobbeltpile (biimplikationspile), der fortæller at ligningen før og ligningen efter en dobbeltpil har de samme løsninger:

$$2x+3=5 \Leftrightarrow 2x=5-3 \Leftrightarrow x=\frac{2}{2} \Leftrightarrow x=1$$

Ifølge skemaet vil det derimod være decideret forkert at forbinde ligningerne med lighedstegn:

$$2x+3=5 = 2x=5-3 = x=\frac{2}{2} = x=1$$

):

Lighedstegnet betyder jo, at tallene før og efter lighedstegn er ens, hvilket i den viste forkerte brug af lighedstegn fører til nonsens som $5=5-3=1$.

Opgave 3: Find fejlen:

$$2x^2+3x=5x \Leftrightarrow 2x^2=2x \Leftrightarrow x=\frac{2x}{2x} \Leftrightarrow x=1$$

Opgave 4: Opstil en formel, der for $a_1 \neq a_2$ udtrykker løsningen til ligningen $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ ved de arbitrære konstanter a_1 , a_2 , b_1 , b_2 . Anvend formlen til at løse ligningen

$$4x+5=2x-3$$

Kontrollér om indsættelse af den således fundne værdi for *x* gør ligningen til et sandt udsagn.

Endnu et eksempel på ukorrekt brug af tegn:

$$x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \vee -3$$):

Her er fejlen at disjunktionstegnet $\vee$ skal bruges mellem udsagn, og -3 er ikke et udsagn.

Det vil derimod være korrekt at skrive $x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-3$.

Det kan i øvrigt anbefales at bruge ordet *eller* i stedet for tegnet $\vee$, således:

$$x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \text{ eller } x=-3$$

Man kan også her droppe dobbeltpilen og skrive:

$$x^2=9$$

$$x=3 \text{ eller } x=-3$$

Alternativt:

$$x^2=9$$

$$x = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$

Eller:

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Man ser også følgende notation:

$$x^2 = 9$$

$$x = 3, -3$$

I dette sidste tilfælde selvfølgelig sørge for at løsningsangivelsen ikke kan sammenblandes med en decimaltalsnotation, hvilket sker hvis man skriver $x = -3{,}3$. Denne sammenblanding kan selvfølgelig kun ske, hvis man anvender *dansk decimalkomma*.

Opgave 5: Tegnet $\Longrightarrow$ kaldes en *implikationspil*, og bruges mellem udsagn således at *hvis* udsagnet før pilen er sandt, *så* er udsagnet efter pilespidsen også sandt. Man kan lade udsagnene bytte side, forudsat at man vender pilen i den modsatte retning. Tegnet $\Leftrightarrow$ er en dobbeltpil også kaldet *biimplikationspil*, som er en kombination af to modsat rettede implikationspile.

Afgør for hvert af disse eksempler om brugen af implikationspilen er "korrekt" i den forstand, at det sammensatte udsagn er sandt:

i. $x = 3 \Longrightarrow x^2 = 9$

ii. $x^2 = 9 \Longleftarrow x = 3$

iii. $x^2 = 9 \Longrightarrow x = 3$

iv. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$

v. $x^2 = 9 \Longrightarrow x = -3 \vee x = 3$

vi. $x^2 = 9 \Longleftarrow x = -3 \vee x = 3$

vii. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$

viii. $x^2 = 9 \Longrightarrow x = -3 \vee 3$

Uligheden $x^2 \leq 2$ (kan læses som x^2 er højst to) har eksakt løsningerne $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ (kan læses som x er mindst $(-\sqrt{2})$ og højst $\sqrt{2}$). Dette kan også skrives således:

$$x^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

eller

$$x^2 \leq 2 \iff x \in \left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right]$$

Hvilket betyder at x er element i det lukkede interval fra $-\sqrt{2}$ til $\sqrt{2}$.

Det vil være forkert at skrive $\sqrt{2} = 1{,}4142$ fordi tallet efter lighedstegnet blot er en *tilnærmet* eller *approksimeret* værdi af kvadratrod 2. Rigtigere vil det være at skrive $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ hvor det krøllede lighedstegn betyder *næsten lig med*. Approksimerede værdier anføres ofte som slutresultat på en praktisk beregning, som er behæftet med en vis usikkerhed. Derimod vil det være meningsløst at skelne mellem lukkede og åbne intervaller, hvis endepunkterne er approksimerede. I forbindelse med definitionsmængdebestemmelser vil det være direkte forkert at benytte sig af tilnærmede værdier. Således er udtrykket $\frac{5}{x^2-2}$ defineret for alle x bortset fra $\pm\sqrt{2}$. Anderledes udtrykt er den størst mulige definitionsmængde for udtrykket $\frac{5}{x^2-2}$ lig med $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, hvor $\mathbb{R}$ betegner de reelle tals mængde.

Opgave 6: At $A \subseteq B$ betyder at mængden A er en delmængde af mængden B. Dette er det samme som at alle elementer i A også er elementer i B. At $B \supseteq A$ betyder ligeledes at A er en delmængde af B.

Afgør hvilke af følgende udsagn, der er sande:

a) $[-1{,}4142;\, 1{,}4142] \subseteq \left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right]$

b) $[-1{,}4142;\, 1{,}4142] \supseteq \left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right]$

c) $[-1{,}4142;\, 1{,}4142] \subseteq \left]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right[$

d) $[-1{,}4142;\, 1{,}4142] \supseteq \left]-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right[$

e) Den størst mulige definitionsmængde for udtrykket $\frac{5}{x^2-2}$ er lig med

$$\mathbb{R} \setminus \{1{,}4142, -1{,}4142\}$$

f) Den størst mulige definitionsmængde for udtrykket $\frac{5}{x^2-4}$ er lig med $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$

Afslutningsvis et par ord om regnemaskiner og computere:

På mange maskiner og programmer er det muligt at vælge mellem eksakt og approximeret værdi. I en ren matematikopgave vil eksakte værdier altid være til at foretrække, men i praktiske opgaver og modelopgaver er det en god idé at approximere slutresultater til eksponentiel notation med et realistisk antal betydende cifre. Den udbredte og nødvendige brug af CAS – værktøjer forleder en del mennesker til at bruge et programmerings sprog i en tekst. Dette fører til dårlig matematisk stil. Således bør sætningen: Jeg solver ligningen $2x+3=5$ og får 1, omskrives til eksempelvis:

$$\text{Ligningen } 2x+3=5 \text{ har løsningen } x=1.$$

I en eksamenssituation kan det dog være hensigtsmæssigt, som en note, at tilføje kommandoen solve($2x+3=5$, x) enter 1 som en supplerende dokumentation.

Facitliste til opgaverne:

Opg. 1: Udsagnet $7 = 2 \cdot 3 + 3$ er falsk, og derfor ligger punktet ikke på linjen. Metode til bestemmelse af punkter: Vælg en x-værdi og beregn den tilsvarende y-værdi af forskriften.

Opg. 2: Skæringpunktet er givet ved $(x, y) = (-4, -11)$.

Formlen for skæringspunktet er $(x, y) = \left(\frac{b_1-b_2}{a_2-a_1}, \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2-a_1}\right)$

Opg. 3: Det er ikke tilladt at dividere med 0. Det, vi finder ved at dividere med $2x$ er derfor løsninger forskellige fra 0. Bedre metode er opløsning i faktorer kombineret med nulreglen:

$$2x^2 + 3x = 5x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

Opg. 4: Formlen er $x = \frac{b_1-b_2}{a_2-a_1}$

Indsættelse af $a_1 = 4, a_2 = 2, b_1 = 5, b_2 = -3$ giver $x = -4$

Opg. 5: I spørgsmål i , ii , v , vi , og vii er implikationspile anvendt korrekt, således at det sammensatte udsagn er sandt.

Opg. 6: Udsagnene a) , c) og f) er sande.

Gode baggrundsartikler fra internettet:

http://www.uvmat.dk/skrift/

(Om den nye skriftlighed i matematikundervisningen. Indeholder gode råd til udformningen af skriftlige eksamensbesvarelser).

http://ems.calumet.purdue.edu/mcss/kevinlee/mathwriting/writingman.pdf

(Dr. Kevin P. Lee: A Guide to Writing Mathematics. Underholdende artikel på gymnasieniveau, som indeholder mange eksempler på god og dårlig stil i opgavebesvarelser).

http://www.math.washington.edu/~lee/Courses/583-2005/writing.pdf

(Notes on Writing Mathematics. Denne tekst behandler god matematisk stil fra et overordnet perspektiv, hvor der lægges vægt på tekstens logiske sammenhæng og disposition. Velegnet som baggrund for større skriftlige arbejder).

Bøger:

Leonard Gillman: *Writing Mathematics Well*, Mathematical Association of America, 1987, ISBN – 0-88285-443-0.

(Virkelig god lille bog om udformningen af større skriftlige arbejder i matematik. Omhandler blandt andet god disposition, bevisførelse og notation i en matematisk tekst).

Norman E. Steenrod, Paul R. Halmos et al: *How to Write mathematics*, American Mathematical Society, 1975,

ISBN 0-8218-0055-8.

(Her er det Paul Halmos artikel om udformningen af en matematisk tekst, der kan anbefales. Artiklen er inddelt i små afsnit med friske overskrifter såsom: 'Say Something', 'Speak to Someone', 'Resist Symbols' og 'Use Symbols Correctly').

Erik Kristensen og Ole Rindung: *Matematik* 1, 10. udgave, C.E.C Gads forlag, 1981. (Kapitel 1 indeholder en fin vejledning til mængder, udsagn og udsagnslogik. Herunder brugen af tegn og symboler).

Aristoteles om uendelighed

Af Charlotte Stefansen

En af de stridigheder man møder inden for matematik vedrører, om man kan tillade brugen af uendeligheder. Groft sagt kan man dele opfattelser af matematik ind i to retninger: realisme og konstruktivisme. Førstnævnte opfatter de matematiske objekter (tal, mængder, geometriske figurer etc.) som havende en eksistens uafhængig af os mennesker. Sidstnævnte mener til gengæld, at de matematiske objekter er konstruktioner fra menneskets side, og derfor ikke vil kunne være til uafhængigt af os. Kort sagt: er de matematiske objekter noget vi opdager eller noget vi opfinder? Alt afhængig af hvilken retning man tilslutter sig, vil man have forskellige opfattelser af uendelighed. Hvis man har en konstruktivistisk tilgang vil uendelighed ikke umiddelbart skabe de store problemer, men til gengæld kan den matematiske realisme støde ind i forklaringsproblemer.

I gymnasieskolen kommer man heller ikke udenom brug af begrebet om uendelighed. Allerede når vi lærer at tælle, skal vi forholde os til, at tallinjen fortsætter i det uendelige. Og når vores talbegreb udvides til at indeholde de reelle tal, skal vi forholde os til, at man altid kan 'grave' dybere ned mellem to tal, og finde et nyt tal – dette kan også fortsætte i det uendelige. I de grafiske repræsentationer af funktioner, der er definerede for alle reelle tal, taler vi om at koordinatsystemets akser 'fortsætter i det uendelige'. Og når vi arbejder med grænseværdier, skal vi også forholde os til udtryk som 'for x gående mod *uendelig*'. Selv for grænseværdier 'for x gående mod 0' kommer vi ud i overvejelser omkring uendeligheder, når man skal forestille sig, at en størrelse kan komme helt tæt på 0, men aldrig være lig med 0. I forbindelse med (Euklidisk) geometri kommer man også ud for uendelighed i forbindelse med definitionen af parallelle linjer, som linjer der fortsætter i det uendelige og som aldrig vil skære hinanden.

Her skal vi dog ikke fokusere så meget anvendelse af uendelighed indenfor matematikken, altså i hvilke tilfælde uendelighed kommer i spil, og vi vil heller ikke gå i detaljer med distinktionen mellem realisme og konstruktivisme. I stedet skal vi se på, hvilke vanskeligheder begrebet om uendelighed kan præsentere for os – også i sammenhæng med matematikken. For hvordan skal vi forstå uendelighed? Er uendelighed en virkelig størrelse? Eller er det et begreb vi har taget i brug, så matematikken bedre kan hænge sammen?

Det er ikke ligefrem revolutionerende at spørge til begrebet om uendelighed, da dette er blevet gjort af så mange andre (især filosoffer) mange gange før. Men til gengæld kan det være interessant at se på, hvad disse andre har gjort sig af overvejelser netop om uendelighed.

En filosof, der undrede sig over uendelighed, var Aristoteles (384-322 fvt.). Aristoteles var født i Stageira nær Makedonien, men som 17-årig tog han til Athen for at studere ved Platons Akademi. Her blev han i 20 år indtil Platons død, hvorefter han rejste først til Assos og senere Lesbos. I 343 blev Aristoteles kaldt til Makedonien, hvor han skulle arbejde som huslærer for kong Philips 13-årige søn, senere kendt som Alexander den Store. Man mener Aristoteles blev i Makedonien i 3 år. Senere vendte Aristoteles tilbage til Athen, hvor han underviste i det offentlige Lykeion – en slags gymnasium. I 323 døde Alexander den Store, hvilket medførte opstand og en anti-makedonsk bølge

i Athen. Derfor rejste Aristoteles til Chalkis, hvor han havde familie. Her døde han året efter. Aristoteles er kendt for at have skrevet et stort antal skrifter omhandlende alt fra biologi, etik og politik. Men også logik, psykologi og retorik.[22]

I sin bog om fysik (kaldet 'Fysikken') undersøger Aristoteles naturen – eller nærmere betegnet 'de naturlige ting'. Ifølge Aristoteles, så har matematikeren og fysikeren i en vis forstand et fælles genstandsområde: flader og rumfang, linjer og punkter. I forbindelse med disse genstande siger Aristoteles, at man vil være nødt til komme ind på at tale om uendelighed. Fysikerens undersøgelse af naturen indeholder en undersøgelse af *bevægelse* og *forandring*, da naturen netop er udgangspunkt for disse. Bevægelse har at gøre med det kontinuerlige, som igen baseres på et begreb om *uendelighed* (idet det kontinuerlige er noget, der kan deles i det uendelige). Bevægelse, siger Aristoteles, kan ikke lade sig gøre uden rum og tid. Og her er der igen brug for et begreb om det uendelige, da fx tiden ikke har nogen begyndelse (eller afslutning). Så en person som arbejder med naturvidenskab er nødt til at undersøge det uendelige for at finde ud af, om det findes eller ej – og hvis det findes, hvad det så er for en størrelse.

Aristoteles henviser til Pythagoræerne og Platon og deres opfattelse af uendelighed. Pythagoræerne søger det uendelige i de ting, der kan sanses og ser det uendelige som havende en selvstændig væren. Dette betyder faktisk, at selv om der ikke var en verden til, som vi kunne sanse – og selv hvis vi mennesker heller ikke var til – så ville der stadig være uendelighed. At uendelighed skulle have en sådan selvstændig væren afvises af Aristoteles. Platon derimod anser det ikke for muligt, at der skulle findes noget (uendeligt) udenfor universet, men mener alligevel, at det uendelige findes både i de sanselige ting og i ideerne uafhængigt af mennesket – men der kræves altså et univers, hvor der uendelige kan være. Også denne opfattelse er Aristoteles skeptisk overfor. For hvordan får vi mennesker så adgang til dette uendelige? Hvordan kan vi opleve det?

Aristoteles giver nogle eksempler på sammenhænge, hvor man støder på uendelighed: Tid er uendelig i den forstand, at den altid har været og altid vil være. Talrækken er også uendelig – dog skal vi huske på, at for Aristoteles er der alene tale om de naturlige tal. Talrækken har en begyndelse (tallet 1), men vil så kunne fortsættes i det uendelige, da man altid kan føje et større tal til. Kontinuerte størrelser (fx en linje) vil altid kunne deles i mindre størrelser – og vil kunne deles i det uendelige. De reelle tal er også et godt eksempel på kontinuerte størrelser – dog ikke et eksempel Aristoteles selv ville have omtalt, da matematikken på Aristoteles tid ikke opererede med den reelle talrække. Hvis man tager en delmængde af de reelle tal, vil man altid kunne udtage en ny delmængde, og endnu en og således i det uendelige. For eksempel kan vi dele intervallet fra 0 til 1 og udtage intervallet fra 0 til ½ osv.

Men hvis uendelighed undersøges nærmere vil vi ifølge Aristoteles se, at der ikke findes noget legeme som i realiteten er uendeligt – eller med Aristoteles ord: er i besiddelse af en *aktuel* uendelighed. Med dette mener han, at lige meget hvor vi mennesker leder, så vil vi ikke kunne finde

[22] Der er endda tegn på at Aristoteles skulle have skrevet et værk om komik – men dette er gået tabt for eftertiden (Umberto Eco's *'Rosens Navn'* har et underholdende bud på, hvad der er sket med dette værk – filmatiseringen kan også anbefales).

noget eksempel på uendelighed i 'den virkelige verden'. Dette overfører Aristoteles direkte til andre størrelser (som ikke nødvendigvis er noget vi kan tage og føle på): fx tid og linjer. Aristoteles mener, at den manglende aktuelle uendelighed også må skabe problemer for disse andre mere abstrakte størrelser: for så må der være en begyndelse og ende på tiden, linjer kan ikke blive ved med at blive opdelt i mindre stykker, og talrækken kan ikke være ubegrænset. Hvordan skal dette løses? For det lader til at i én forstand findes det uendelige, men i en anden forstand gør det ikke[23].

Når Aristoteles taler om at noget findes, eller eksisterer som et værende, så kan det gøre dette på to måder: dels mulig væren (*potentiel* væren) og dels virkelig væren (*aktuel* væren). Men at der skulle findes nogen uendelig størrelse i virkeligheden, dvs. at der findes aktuel uendelighed, mener Aristoteles at have tilbagevist. Derfor må uendelighed kun kunne findes som en mulighed – altså potentielt.

Væren har ifølge Aristoteles mange betydninger: fx når vi siger, at dagen *er* til, eller når vi siger, at der *findes* olympiske lege. Her mener Aristoteles, at vi både kan tale om mulighed og virkelighed. For når vi siger, at der findes olympiske lege – så er det både som mulighed (dvs. at de olympiske lege kan finde sted på et tidspunkt) og som virkelighed (at de olympiske lege faktisk finder sted – hvilket de jo gør hvert 4. år). Aristoteles giver ikke selv flere eksempler, som kan illustrere forskellen mellem aktuel og potentiel væren, men vi kan jo også vende blikket mod matematikkens verden for et eksempel. Andengradsligninger har potentielt ingen, én eller to løsninger. Når ligningen er løst er løsningen blevet aktuel.

Det uendelige findes til gengæld kun som en mulighed. Man kan blive ved med at forøge eller dele en størrelse i det uendelige – men dette er kun udtryk for en potentiel uendelighed. Hvis vi fx ser på opdelingen af en linje, så vil vi potentielt kunne gøre dette i det uendelige – men aktuelt vil vi aldrig kunne afslutte en sådan deling, for vi er begrænset af vores levetid. Derfor vil den uendelige opdelingen aldrig være færdiggjort, og altså heller ikke fuldt ud aktualiseret. Ifølge Aristoteles skal uendeligheden kunne begribes af én enkelt person, for at være aktuel. I sagens natur, kan en enkelt person ikke dette. En enkelt person vil fx heller ikke kunne være vidne til en talrække, der fortsætter i det uendelige, da mennesket med Aristoteles ord er et endeligt væsen, begrænset i tid (og rum).

Problemer for matematikken

Aristoteles mener selv, at hans egen fremstilling af det uendelige som noget, der kun er potentielt værende, ikke skaber problemer for matematikken. For ifølge Aristoteles er det ikke strengt nødvendigt for matematikere at gøre brug af uendeligheder, men de kan fx nøjes med begrænsede linjer – for sådanne kan jo deles på samme måde som en uendelig størrelse (altså som ren mulighed). Og i forbindelse med matematikkens beviser, vil det heller ikke gøre nogen forskel om uendelighed kun er til som mulighed. Uendelighed som virkelighed må til gengæld afvises, da der netop ikke findes virkelige størrelser som er uendelige.

[23] En lignende problematik ses også ses astronomien, hvor man taler om et uendeligt univers, men hvori der stadig kun er et endeligt (om end meget stort) antal partikler. Man ville måske tro, at der så også ville være et uendeligt antal partikler i dette uendelige univers.

Dette kan dog skabe problemer for anvendelsen af matematik i dag. For hvor Aristoteles skelner skarpt mellem matematikken som en abstrakt, teoretisk disciplin og fysikken som en virkelig, anvendelig disciplin, så er det jo ikke sådan, at vi i dag holder matematik og fysik skarpt adskilte. Og her er der tilfælde, hvor man i fysikken benytter teori fra matematik, som indeholder et element af uendelighed (fx fysikkens brug af differentialregning til at beskrive fart eller acceleration). Er vi så ikke tilbage i en gråzone igen, hvor det er svært kun at se uendelighed som en mulighed, men at det også må findes som en virkelighed?

Aristoteles og Zenon

Aristoteles var langt fra den første til at behandle begrebet om uendelighed. En tidligere græsk filosof, som vi kun fragmentarisk har kendskab til (bl.a. gennem Aristoteles), Zenon fra Elea, har også udført analyser af begreber som delelighed, kontinuitet og uendelighed. Zenon viser bl.a. gennem sine paradokser, at det værende er udeleligt og at bevægelse ikke er muligt.

Det er gennem Aristoteles og hans *Fysik*, at vi har fået overleveret flere af Zenons berømte paradoxer, bl.a. anekdoten om Achilleus, der skal løbe om kap med en skilpadde og også om pilen, der til enhver tid, vil være i hvile, selv om den flyver gennem luften. I *Fysikken* tilbageviser Aristoteles dog disse paradokser.

Forslag til littereatur:

- ”Klassiske tænkere: Aristoteles’ Forelæsninger over Fysik I-IV”, oversat af Poul Helms, 1951 (ny udgivelse 1999), Gyldendal

- ”Matematikkens aspekter – om det uendelige”, Lars Mejlbo, 1991, Matematiklærerforeningen

- ”Den europæiske filosofis historie - Antikken” af Karsten Friis Johansen, 1994, Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck,
  (1.del, kap. 5 om Eleaterne (bl.a. Zenon), 4. del om Aristoteles)

- ”*Matematikkens filosofi*” af Stig A. Pedersen i ”Et spadestik dybere”, Vincent F. Hendricks og Steen W. Pedersen (red.), 2008, Automatic Press

- ”Tankens magt (bind 1)”, Hans S. Jensen, Ole Knudsen og Frederik Stjernfelt (red.), 2006, Lindhart og Ringhof
  (afsnittet om ’Antikken’ har bl.a. to afsnit om hhv. naturvidenskab og filosofi som beskriver antikkens tankegang)

- ”Matematikken og verden”, Mogens Niss (red.), 2001, Fremad
  (kap. 3 af H.C. Hansen om de to retninger indenfor matematikkens filosofi)

- ”Introducing Philosophy of Mathematics”, Michèle Friend, 2007, Acumen Publishing Limited
  ((meget) amerikansk indføring i matematikkens filosofi, bl.a. med et kapitel om uendelighed)

Matematiske beviser

Af Mads Keinicke

Indledning

Bevisers struktur

Her introduceres en analysemodel der kan bruges til at give overblik over et matematisk bevis og forhåbentlig hjælpe forståelsen af beviset på vej.
Vi indfører modellen ved hjælp af et eksempel. Som eksempel analyseres beviset for Pythagoras sætning.

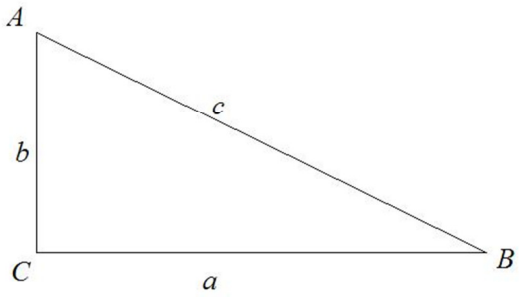
Pythagoras sætning fortæller os at hvis en trekant er retvinklet så gælder der en bestemt relation mellem sidernes længder, som kan udtrykkes ved den velkendte ligning $c^2 = a^2 + b^2$. Beviset skal derfor være en kæde af ræsonnementer der viser at den særlige egenskab at trekanten har en ret vinkel, logisk fører til at ligningen mellem siderne gælder.

Eksempel Pythagoras sætning

I en lærebog kan sætningen med bevis være formuleret på følgende måde:

Sætning
For en retvinklet trekant med hypotenuse c og kateter a og b, som vist på figuren, gælder:

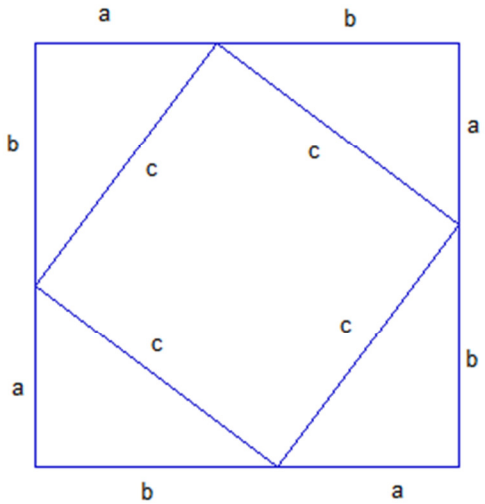
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Eller skrevet med ord, kvadratet på hypotenusen er lig med summen af kvadraterne på kateterne.

Bevis:
Figuren til højre viser et kvadrat med sidelængde $a + b$. Arealet af kvadratet er

$$A = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$



Arealet kan tillige beregnes som summen af arealerne af det røde kvadrat og de fire trekanter.

$$A = c^2 + 4 \cdot (½ \cdot a \cdot b)$$

Arealets størrelse er uafhængigt af beregningsmetoden, altså er

$$c^2 + 4 \cdot (½ \cdot a \cdot b) = a^2 + b^2 + 2ab$$

Denne ligning omskrives til

$$c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Hermed er sætningen bevist

Vi kan nu opdele beviset i delelementer

Udgangspunkt: Konstruktion af kvadratet med kantlængde a + b og opdelingen af kvadratet i det mindre kvadrat og fire trekanter. Konstruktionen bygger altså dels på forudsætningen om at trekanten er retvinklet og dels på bevisets gennemgående idé, som er beregningen af kvadratets areal på de to måder.

Påstand 1: Ligningen $c^2 + 4\cdot(\frac{1}{2}\cdot a\cdot b) = a^2 + b^2 + 2ab$ gælder

Ræsonnement som fører fra udgangspunktet til påstand 1: Udtrykkene på begge sider af lighedstegnet er fremkommet ved at bestemme arealet af kvadratet. Da begge metoder til bestemmelse af arealet er korrekte og da arealet selvfølgelig er uafhængigt af hvilken metode der bruges er de to udtryk ens.

Ræsonnementet bygger på kendskab til beregning af et kvadrats areal (kvadratet på kantlængden) og beregning af en retvinklet trekants areal (halvdelen af kateternes produkt).

påstand 2: Ligningen $c^2 = a^2 + b^2$ gælder

Ræsonnement som fører fra påstand 1 til påstand 2: Ved reduktion og almindelig ligningsmanipulation omskrives ligningen fra påstand 1 til ligningen i påstand 2.

Konklusion: Påstand to er identisk med sætningen.

Analysen af beviset kan stilles skematisk op som nedenfor

<table>
<tr><td colspan="2">Udgangspunkt: et kvadrat med kantlængde a + b</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Forudsætninger:
trekanten er retvinklet
Idé: opskrivning af arealet på to forskellige måder</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>Ræsonnement:
Kvadratets areal kan udtrykkes ved to forskellige formler.
Da arealet er det samme uanset hvilken formel der bruges er de</td><td>Forudsætninger for ræsonnementet:
Beregning af arealer af kvadrater og retvinklede trekanter.</td></tr>
</table>

	to udtryk lig hinanden	Arealets størrelse er uafhængigt af beregningsmetoden. Regler for bogstavregning
Påstand $c^2 + 4 \cdot (½ \cdot a \cdot b) = a^2 + b^2 + 2ab$		
	Ræsonnement: Ligningen omskrives ved hjælp af tilladte regneoperationer. Den sidste ligning følger derfor af den første, som gennem første ræsonnement følger af at trekanten er retvinklet	**Forudsætninger for ræsonnementet:** Regneregler brugt til reduktion og omskrivning af ligning
Konklusion $c^2 = a^2 + b^2$		

Øvelse vinkelsummen i en trekant

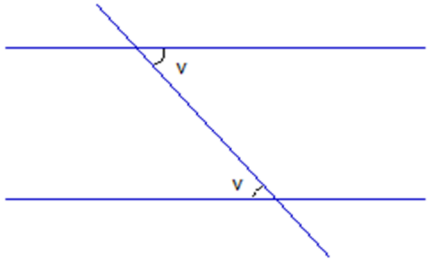
Analyser beviset for sætningen om vinkle summen i en trekant på samme måde som beviset for pythagoras sætning blev analyseret ovenfor

Sætning

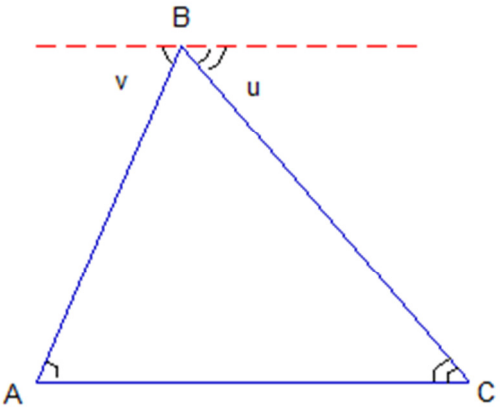
Vinkel summen i en trekant er 180°

Bevis:

Når to parallelle linjer skæres af en tredje linje kaldes de vinkler der er markeret på figuren til højre *ensliggende ved parallelle linjer*. Vinkler der er ensliggende ved parallelle linjer er lige store



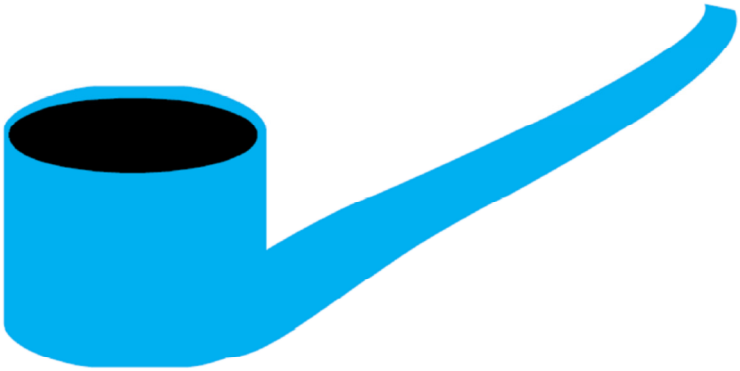
Vi ser på trekanten *ABC* som er vist på figuren. Gennem vinkelspisen *B* trækkes en linje som er parallel med siden *AC* i trekanten. Ved B er der nu dannet tre vinkler *v*, *u* og *B* under den linje der blev trukket gennem *B*. Disse tre vinkler er tilsammen 180°.
Vinklen *u* og vinklen A i trekanten er ensliggende ved parallelle linjer og derfor lige store. Det samme gælder for vinklerne *v* og *B*.
Heraf ses det at trekantens vinkel sum er 180°



Magrittes pibe og matematisk modellering

Af Jørgen Ebbesen

Den belgiske surrealist René Magritte malede i 1928-1929 ***La Trahison des Images***, på dansk ***Billedernes bedrag***. Billedet er en minutiøs gengivelse af en pibe. Under piben har Magritte skrevet med sirlig skrift: ”Ceci n’est pas une pipe”



Dette er ikke en pibe. Det ligner ikke en gang, og derved går en del af pointen tabt. Men Magrittes arvinger har nedlagt forbud mod, at arbejdsgruppen benytter hans billede. Besynderligt set i lyset af billedets ikonagtige status. Det ligger og flyder alle vegne på nettet, hvad læseren kan forvisse sig om ved en billedgoogling på "Ceci n'est pas une pipe"

Pointen er selvfølgelig, at billedet er en illusion. Det ***forestiller*** en pibe, men det er jo kun ***et billede*** af piben, ikke ***the real thing***.

Maleriet er åbenlyst et manifest og en provokation, for ellers havde Magritte ikke behøvet at skrive teksten på billedet, jf. maleriets titel. Og det er skægt, som han sætter tingene på spidsen ved sin nærmest fotografiske gengivelse af piben. Den naturlige reaktion på billedet er: jo, det er en pibe, hvad skulle det ellers være? Først i anden omgang kommer man i tanke om, at det selvfølgelig ikke kan være en pibe – det er fx svært at ryge af den. I en tid, hvor fotografier og film blev hvermandseje, kan man se Magrittes maleri som en advarsel om ikke at forveksle billeder med virkeligheden, hvor overbevisende de end måtte være.

Da jeg gik i gymnasiet i begyndelsen af 70’erne, stødte jeg ikke på begrebet ***matematisk model*** en eneste gang i matematiktimerne, eller også har jeg fortrængt det. Eksempler fra andre fag – fortrinsvis fysik – blev inddraget i begrænset omfang. Og de tjente til at belyse matematiske begreber og sætninger. Faget matematik var overordnet og styrende.

Da jeg startede som gymnasielærer i begyndelsen af 80'erne, var der en skærpet opmærksomhed på matematiks anvendelse i samfundet. Hvad var der sket i mellemtiden? Den teknologiske udvikling inden for IT gjorde det muligt at håndtere komplekse modeller som fx makroøkonomiske modeller, fiskerimodeller og trafikmodeller. Disse modeller indgik i beslutningsgrundlaget inden for centrale politiske områder. Modelberegningerne blev genstand for berettiget kritik: de var svære at gennemskue og argumentere mod. Parallellen til Magrittes billede blev brugt som en advarsel: modellerne havde billedets besnærende magi, men måtte ikke forveksles med virkeligheden.

Siden er udviklingen fortsat. I Teknologirådets rapport ***Magt og modeller*** fra 1995 opgjordes 48 modeller udviklet i Danmark.

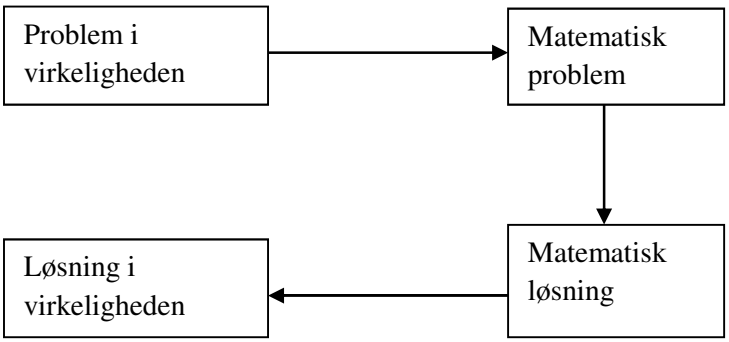
Tabel 1: Udviklingsperiode for de modeller, der er omfattet af undersøgelsen

Tidsinterval	Antal modeller
1960-1969	2
1970-1979	12
1980-1989	19
1990-1995 (obs: 5 år)	15

Matematiske modeller spiller en stadig større rolle i vores moderne samfund på mange niveauer og i mange sammenhænge. Modelberegninger er en vigtig del af det politiske beslutningsgrundlag som allerede anført. I forbindelse med overenskomstforhandlinger er forhandlingsparterne bevæbnet til tænderne med omkostningsberegningsmodeller. Prisfastsættelse og strategier i større erhvervsvirksomheder er baseret på modelberegninger. Inden for områder som biologi og medicin udføres komplicerede modelberegninger muliggjort af avanceret modelleringssoftware og hardware med større og større regnekraft. Nye medicinske præparater kan afprøves på virtuelle patienter, før de testes på levende mennesker.

Ovenstående er kun et lille udvalg af eksempler til belysning af den store og tiltagende samfunds-betydning af matematiske modeller. På den baggrund er det ikke mærkeligt, at der lægges en stadig større vægt på modelleringsaspektet i matematikundervisningen. Både af hensyn til det almendannende perspektiv på uddannelse: tilegnelsen af matematiske kompetencer er vigtig for elevernes mulighed for at blive velfungerende, kritiske samfundsborgere, som kan tage selvstændig stilling til modelberegninger uden at være i lommen på eksperter med uklare interesser. Og til det studieforberedende perspektiv: modelberegninger trænger frem inden for fagområder, som traditionelt har været matematikfri.

Hvad vil det sige at modellere? Det første lidt naive tilløb til at beskrive modelleringsprocessen er, at man "oversætter" det problem, man ønsker at løse, til et matematisk problem. Så løses det matematiske problem inden for faget matematiks trygge rammer. Til sidst "oversætter" vi tilbage til en løsning på det virkelige problem.



”Oversættelsen” fra virkeligheden består i en række forenklinger, hvor vi risikerer at reducere problemstillingen i en sådan grad, at selv om vi kan løse det matematiske problem, er løsningen måske uanvendelig. Den skal under alle omstændigheder underkastes en kritisk undersøgelse.

En systematisk fejl ved modellering, er, at modeller har en tendens til at blive kausale i den forstand, at vi gerne vil bruge dem til at forudsige og styre en udvikling. Vi reducerer og systematiserer med dette for øje. Men den virkelighed, vi modellerer, er måske ikke helt så forudsigelig og styrbar, som modellen uvægerligt giver indtryk af.

Traditionelt har vi lagt mest vægt på højre side af diagrammet i matematikundervisningen. Og når sandheden skal frem, har dette ikke ændret sig meget, selv om modellering er blevet mere og mere centralt i læreplanerne. Til skriftlig studentereksamen er ”oversættelsen” i den øverste af de tre pile altid foretaget på forhånd. Det nye er, at matematikopgaverne tager afsæt i virkelighedsnære problemstillinger. Det er så elevernes opgave at gennemskue, hvilken matematikopgave, der gemmer sig mellem linjerne, og løse den.

Det siger sig selv, at det kræver faglig indsigt i det område, man modellerer inden for. Det ligner en fornuftig arbejdsfordeling, hvis vi sørger for, at eleverne stifter bekendtskab med forskellige modeltyper og lærer dem at håndtere den nødvendige matematik. Og overlader oversættelsen til fagfolk på aftagerinstitutionerne.

Det viser sig imidlertid, at selv de elever, der er gode til at løse matematiske problemer, har vanskeligt ved at anvende det lærte, når de senere har brug for det i praksis i andre sammenhænge. Det er svært at forstå, når man betragter vores model (sic!) af modelleringsprocessen. Hvis de vandrette pile, som svarer til oversættelse til og fra model, var uafhængige af den lodrette pil, som repræsenterer den matematiske problemløsning, er det uforklarligt, at man ikke bare kan tilføje oversættelsespilene på de videregående uddannelser. Men det virker altså ikke.

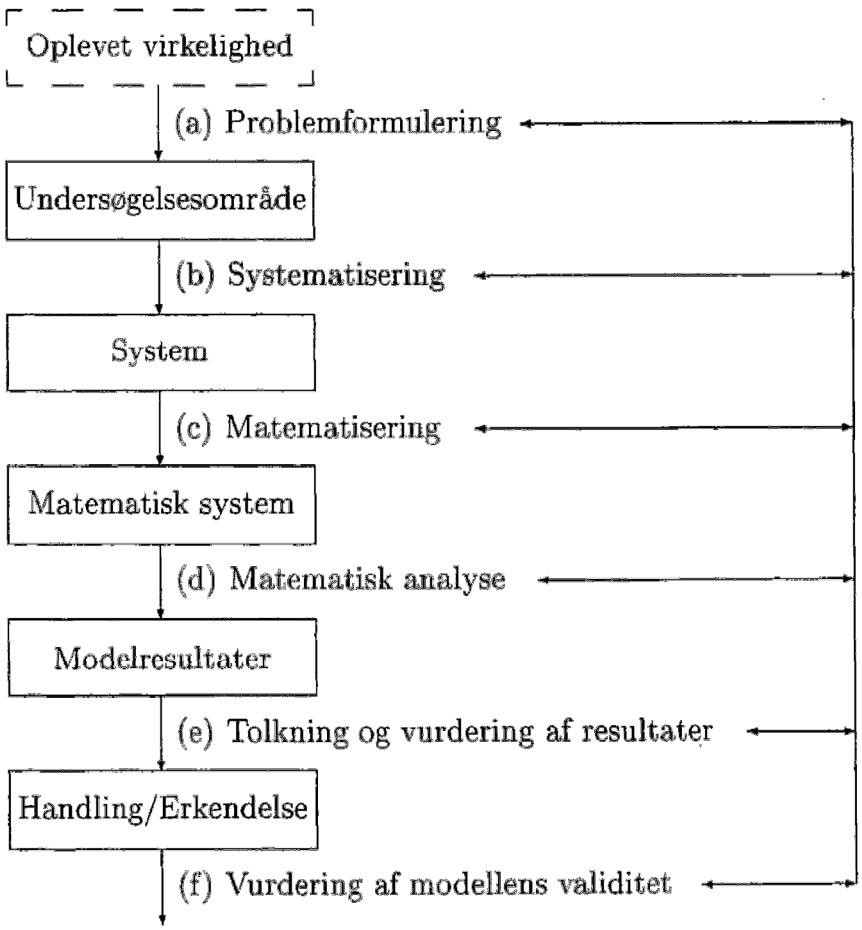
Forklaringen er formentlig, at pilene ikke er uafhængige af hinanden, og at den erfarne modelbygger under hele modelleringsprocessen har det virkelige problem i baghovedet. Der findes altså ingen ren matematisk problemløsningsfase. Og ved oversættelsen holder modelbyggeren det matematiske problem, der udkrystalliseres, op i mod sit bagkatalog af modeller. Det nytter fx ikke

at bevare kompleksiteten af det virkelige problem i modellen, hvis denne viser sig matematisk uhåndterbar.

Hvis vi vil forstå modelleringsprocessen og de vanskeligheder, der er forbundet med den bedre, er der behov for en mere nuanceret beskrivelse af den.

På RUC, hvor matematisk modellering har spillet en vigtig rolle ved den naturvidenskabelige basisuddannelse, har man haft glæde af nedenstående mere detaljerede beskrivelse af modelleringsprocessen.

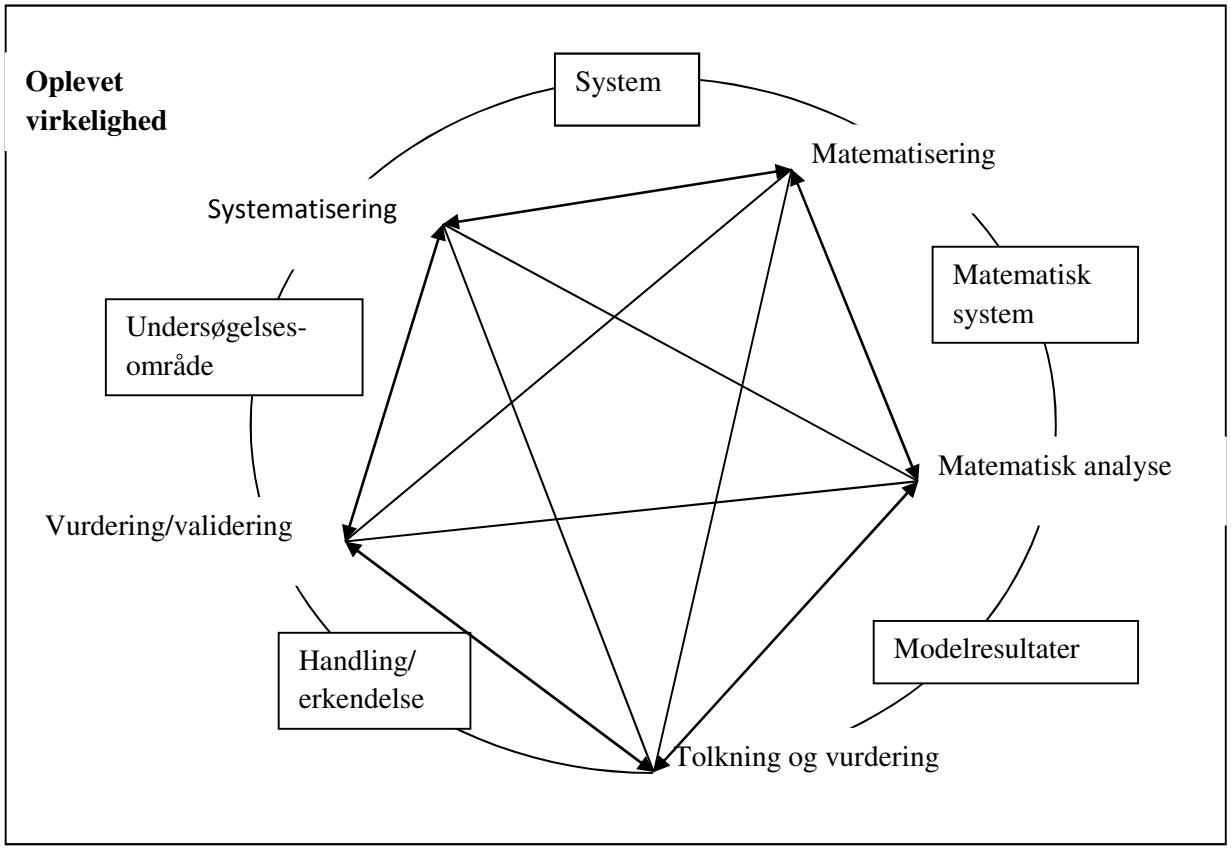
Figur 2.1 En model af den matematiske modelleringsproces



Morten Blomhøj, Thomas Højgaard Jensen, Tine Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen: *Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse – udvikling af et kursus*, IMFUFA tekst 402 2001, side 12.

Den interesserede læser henvises til den udførlige beskrives side 11-18 i rapporten. Ud over den mere detaljerede beskrivelse af modelleringsprocessen tydeliggør modellen det store arbejde, der ligger før matematikken (den lodrette pil fra den naive model er pil (d) her). Desuden viser stisystemet til højre på figuren, at de enkelte dele af processen er koblede: det kan være nødvendigt at gå tilbage og foretage justeringer.

Jeg kan personligt bedre lide opstillingen nedenfor, som understreger de enkelte delprocessers afhængighed af hinanden. Og det cirkulære aspekt af modelleringen: man kan forbedre sin model ved at foretage ekstra gennemløb. Men det er principielt den samme model som ovenfor (bare underkastet en topologisk transformation;)



Hvor meget eleverne får ud af den slags betragtninger, ved jeg ikke. Men hvis man som lærer kan genkende billedet, er det vel oplagt, at det bør have konsekvenser for undervisningen? Fx i form af særligt tilrettelagte forløb, hvor eleverne prøver kræfter med hele modelleringsprocessen. Det ville være oplagt at lade et af projektforløbene være et modelleringsforløb.

Man kunne ved læsning af ovenstående få det indtryk, at matematisk modellering var et forholdsvis nyt fænomen. Det er det ikke. Men karakteren af de matematiske modeller har ændret sig. Takket været IT-udviklingen er vi ikke længere begrænset til at beskæftige os med simple problemer, som har analytiske løsninger. Fokus er flyttet fra grundlæggende lovmæssigheder til mere komplekse problemstillinger. Almindelige gymnasieelever kan vha. CAS-værktøj foretage modelberegninger, som før PC'en blev hvermandseje, krævede indsigt i numerisk analyse, kendskab til et programmeringssprog og adgang til computer. En adgang, som da jeg studerede i 70'erne, var forbeholdt forskere og datalogistuderende.

Man må dog ikke i begejstringen over de nye muligheder overse, at matematik i selve sit udspring er et modelleringsværktøj, det vidner fx ordet geometri om. Grundbetydningen er ***landmåling***. Og historisk har matematik gået hånd i hånd med anvendelser inden for fysik og astronomi. Før renæs-

sancen blev matematikken dog fortrinsvis brugt på den supralunare del af Universet (fra månen og udefter). Her var forbindelsen imidlertid så intim, at astronomien blev opfattet som en del af matematikken.

I løbet af renæssancen kom matematikken ned på jorden;) jf. Galileis berømte faldrendeforsøg.

Det er skæbnens ironi, at Galileis betragtning om matematik som det sprog, naturen er skrevet i, er mere tvetydig end som så. Hvis man tager lidt mere med, lyder citatet nemlig:

Naturfilosofien er skrevet i denne storslåede bog, der altid står åben foran vore øjne (jeg kalder den universet), men som ikke lader sig forstå uden at man først lærer at forstå sproget, og kender de bogstaver, hvormed den er skrevet. Den er skrevet på matematikkens sprog, og dens bogstaver er trekanter, cirkler og andre geometriske figurer, foruden hvilke det er menneskeligt umuligt at forstå dens ord; foruden hvilke vi vandrer uhjælpsomt rundt i en mørk labyrint. (Galilei: ***Il Saggiatore*** her citeret fra Jacob Thygesen: ***Galileo Galilei og kontroversen om kometerne***)

Læg mærke til, at, Galilei henviser til et mindre hjørne af matematikken, nemlig geometrien. Det centrale i citatet er snarere, at Universet er facitlisten, ikke Biblen. Og Galilei opfattede næppe selv det heliocentriske verdensbillede som en model. For kernen i inkvisitionens sag mod Galilei var, hvor vidt det heliocentriske verdensbillede var sandheden eller blot en teori. Det sidste kunne Kirken leve med, men den havde patent på sandheden.

Hvor om alting er: matematikken havde indledt sit triumftog i fysikken her på jorden med foreløbig kulmination i Isaac Newtons ***Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*** fra 1687. Læg i øvrigt mærke til en vigtig forskel mellem fysikkens love og moderne ad hoc modellering: selv om Newton selv opfattede principperne som matematiske og ikke udtryk for de grundlæggende fysiske love, havde han fat i den tunge ende til forståelse af rum og tid, en forståelse som udkrystalliseredes i Albert Einsteins almene relativitetsteori..

Kompetencer i matematik, ét redskab til at tale om videnskabelighed i matematik

Af Jakob Holm

På konferencen om matematisk videnskabsteori, maj 2009, fremlagde fagkonsulent Bjørn Grøn følgende:

> ”*Fagene bærer i særlig grad* ***bestemte dele af deres læreplaner og deres teorier og metoder*** *med ind i AT. Det er i disse elementer fagenes videnskabelighed træder frem i mødet med andre fag. Hvilke dele? – Det må de enkelte fag overveje*.”

Dette skrift skal ses som et bud på ét redskab til at tale om matematik fagets videnskabelighed i AT-sammenhæng.

Videre på konferencen om matematisk videnskabsteori fremlagde fagkonsulent Bjørn Grøn følgende

> *”Indgår i de faglige mål for AT: … indsigt i elementær videnskabsteori*
>
> *Elementær videnskabsteori drejer sig om:*
>
> – *at kunne diskutere, hvad det vil sige at opnå indsigt*
> – *at kunne ”se fagene ovenfra”, dvs. forholde sig reflekteret til fagene og kunne diskutere og vurdere, hvad de valgte fag kan og ikke kan – generelt, i relation til sagen og i et samspil med hinanden*
> – *at kunne redegøre for pågældende fags genstandsfelt og dets særlige og karakteristiske metoder og teorier – uden nødvendigvis at gå ned i detaljerne, f.eks. i en litterær analyse eller et matematisk bevis.”*

Ifølge dette handler elementær videnskabsteori altså om ”hvad det vil sige at opnå indsigt”, ”at kunne se fagene ovenfra”og ”kunne redegøre for fags genstandsfelt og dets særlige og karakteristiske metoder og teorier”.

For faget matematik vil - i hvert tilfælde - de to sidste emner i en vis grad kunne belyses gennem en kompetencebeskrivelse af matematisk faglighed. Der er udgivet en rapport ”Kompetencer og Matematiklæring” i 2002, se http://pub.uvm.dk/2002/kom/helepubl.htm , hvor der i foromtalen til rapporten står

Rapporten præsenterer otte centrale matematiske kompetencer, som har gyldighed for matematikundervisning på samtlige uddannelsestrin:

- *Tankegangskompetence - at kunne udøve matematisk tankegang*
- *Problembehandlingskompetence - at kunne formulere og løse matematiske problemer*
- *Modelleringskompetence - at kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter*

- *Ræsonnementskompetence - at kunne ræsonnere matematisk*
- *Repræsentationskompetence - at kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold*
- *Symbol- og formalismekompetence - at kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme*
- *Kommunikationskompetence - at kunne kommunikere i, med og om matematik*
- *Hjælpemiddelkompetence - at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed, herunder it.*

Desuden udpeges tre former for overblik og dømmekraft vedrørende matematik:

- *Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder*
- *Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning*
- *Matematikkens karakter som fagområde.*

For en nærmere uddybning af disse emner, så se den omtalte rapport ” Kompetencer og Matematiklæring”.

Buddet på redskabet til at tale om matematik fagets videnskabelig i AT-sammenhæng er at benytte definitionen af disse kompetencer som en måde at tale om fagets metoder og teorier.

Følgende vil jeg starte med at undersøge, hvordan bekendtgørelsen for stx Mat A forholder sig til disse kompetencer. Det vil jeg gøre ved at gribe fat på bekendtgørelsens enkelte faglige mål og rubricerer disse under de nævnte otte kompetencer og de tre former for overblik og dømmekraft.

Derefter vil jeg illustrere hvordan kompetencer kan benyttes i AT-sammenhæng. Jeg vil i en konkret case, vise hvordan de enkelte kompetencer kommer i spil.

Stx Mat A-bekendtgørelsen i kompetencelys

Som annonceret vil jeg gruppere bekendtgørelsens faglige mål efter de otte kompetencer og de tre former for overblik og dømmekraft.

Kompetencer, overblik og dømmekraft	Faglige mål i stx Mat A
Tankegangskompetencen	Kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes
Problembehandlingskompetencen	Selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold Løse geometriske problemer på grundlag af trekantsberegninger Foretage simuleringer og fremskrivninger i forbindelse med arbejde med modeller

	Ud fra en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål
Modelleringskompetencen	Anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder Kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes Anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder Kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger Opstille geometriske modeller
Ræsonnementkompetencen	Denne kompetence er med i de fleste faglige mål, da kompetencen består i at følge et matematisk ræsonnement og i at udtænke og gennemføre ræsonnementer. Ræsonnementskompetencen er intimt forbundet med både problembehandlings- og modellingskompetencerne da den udgør så at sige disses "juridiske" side. Men et eksplicit emne fra de faglige mål er: Redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori
Repræsentationskompetencen	Anvende forskellige fortolkninger af stamfunktion
Symbol- og formalismekompetencen	Håndtere formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog Selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold Foretage simuleringer og fremskrivninger i forbindelse med arbejde med modeller Forskellige metoder til løsning af differentialligninger Kunne give en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer
Kommunikationskompetencen	Ved arbejde med modeller at være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog Redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori
Hjælpemiddelskompetencen	Anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer Foretage simuleringer og fremskrivninger i forbindelse med arbejde med modeller

Matematikkens anvendelse i andre fag	Demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling
Matematikkens historiske udvikling	Demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling
Matematikkens karakter som fagområde	

Det følgende skrift er en fortsættelse af skriftet

"Kompetencer i matematik, ét redskab til at tale om videnskabelighed i matematik"

og giver eksempler på anvendelse af matematikkompetencer i artiklen ”Indtagelse af rusmidler og kørsel med automobil”. I sidste halvdel af skriftet er det op til læseren at afgøre hvilke kompetencer, der er anvendt i artiklen.

Det er opbygget således at, på hver anden side er der kommentarer til de oprindelige sider. Kommentarerne er en angivelse af hvilke matematikkompetencer der anvendt.

Ved læsning på computerskærm anbefales at benytte "tosidet visning".

Kompetencer i matematik, et eksempel

Af Jakob Holm

Indtagelse af rusmidler og kørsel med automobil.

Færdselsloven stiller krav til føreren af automobil. Nogle af disse krav angår vores påvirkning af alkohol, rusmidler og medicin. Jeg vil se på hvordan overholdelsen af disse krav harmonerer med indtagelse af disse stoffer. Lad mig starte med at se på færdselsloven.

Fra *færdselsloven, jf. lovbekendtgørelse nr. 1079 af 14. november 2005, med de ændringer, der følger af lov nr. 303 af 19. april 2006, § 21 i lov nr. 309 af 19. april 2006, § 9 i lov nr. 538 af 8. juni 2006 og lov nr. 543 af 8. juni 2006:*

> **§ 53.** For spirituskørsel straffes den, som fører eller forsøger at føre et motordrevet køretøj efter at have indtaget spiritus i et sådant omfang, at **alkoholkoncentrationen** i blodet under eller efter kørslen overstiger **0,50 promille**.
> *Stk. 2.* For spirituskørsel straffes endvidere den, som fører eller forsøger at føre et motordrevet køretøj efter at have indtaget spiritus i et sådant omfang, at den pågældende ikke kan føre køretøjet på betryggende måde.
>
> *Sygdom, spirituspåvirkning m.v.*
>
> **§ 54.** Et motordrevet køretøj **må ikke føres** eller forsøges ført af nogen, som på grund af sygdom, svækkelse, overanstrengelse, mangel på søvn, **påvirkning af opstemmende eller bedøvende midler** eller af lignende årsager befinder sig i en sådan tilstand, at han er ude af stand til at føre køretøjet på fuldt betryggende måde.
>
> *Kontrol m.v.*
>
> **§ 55.** Politiet kan til enhver tid kræve, at føreren af et køretøj eller en rytter foretager udåndingsprøve.
> *Stk. 2.* Politiet kan fremstille en person til **udtagelse af blod**- og urinprøve, hvis der er grund til at antage, at han har overtrådt § 53 eller § 54, stk. 1 eller 2, eller han nægter eller ikke er i stand til at medvirke til en udåndingsprøve. Angår mistanken andre forhold end spirituspåvirkning, kan politiet tillige fremstille den pågældende til undersøgelse af en læge. Det samme gælder ved mistanke om spirituspåvirkning, når særlige omstændigheder taler derfor.

I disse paragraffer er der, som fører af motordrevent køretøj, nogle helt konkrete krav angående indtagelse af alkohol, mens kravene til andre rusmidler og medicin ikke er helt så konkrete. Det der er væsentlig i forhold til kørsel, er at rusmidlet/medicinen, der er indtaget, skal være standset med enten at virke opstemmende, bedøvende eller at give andre påvirkninger til usikker kørsel. Det kan ske ved enten af stoffet fjernes fra kroppen eller at det neutraliseres.

I [Rusmidlernes biologi] skrives følgende: ”Rusmidlernes metabolisering (nedbrydning) finder sted i leveren. Der er principielt to forskellige måder, hvorpå stofferne nedbrydes eller inaktiveres. Den ene metode går ud på at ændre rusmidlets molekylære opbygning, så det ikke længere kan binde sig til en receptor (i hjernen, red). Den anden metode går ud på at koble et andet molekyle på rusmidlet, så det bliver mere vandopløseligt. Hermed kan stoffet udskilles med urinen. Denne proces kaldes en konjugering, og det molekyle, der typisk bruges, er *glucuronidsyre* (som sulfat- eller acetatsalt) (fig. 2.7.). Begge processer foregår inde i levercellernes cytoplasma. Det siger derfor sig selv, at jo lettere et rusmiddel trænger ind i levercellerne, og jo højere koncentration, der er i plasmaet, des mere nedbrydes pr. tidsenhed.”

Kompetencekommentarer til side 78

Her i denne boks anvendes modelleringskompetencen. Det ses bl.a. ved anvendelse af ordene "konkret" og "indskrænke". Desuden antages, at der hurtigt drikkes 5 alm. øl.

Her er en form for modeldiskussion, altså en stillingtagen til om modellen er brugbar eller om den skærer for mange og relevante hjørner af.

Det kan diskuteres, hvilken kompetence, der her er i sving. For at det kan være Problembehandlingskompetencen, skal der være et egentligt problem. Det er vel for meget at påstå, at det er et problem, at bestemme "hvor meget alkohol, der faktisk er i disse 5 øl". Hvis det faktisk opfattes som et problem, så er det Problemløsningskompetencen, der benyttes ellers er det er en opgave løst v.hj.a. rutineoperationer og her kommer Symbol- og formalismekompetencen i brug.

Det at udføre denne "rutineoperation", kan siges at falde ind under Ræsonnementskompetencen, da her godtgøres for et regneresultat. Det er dog ikke tilfældet, da der stilles krav til Ræsonnementskompetencen om opfindsomhed, analyseevne eller overblik. Det er jo ikke aktuelt her. Derimod er det igen Symbol- og formalisemkompetencen der sluttelig benyttes.

Tager modellen op til overvejelse, måske er den for simpel. Modelleringskompetencen.

Symbol- og formalismekompetence. Her foregår en oversættelse fra almindeligt sprog til matematikkens sprog ("f være funktionen", "x kilo")

Indtagelse og nedbrydelse af alkohol

Lad mig nu være konkret ved at se på indtagelsen af alkohol. Der er flere forskellige typer af alkohol, vi som danskere indtager: øl, vin, breezer, stærk spiritus, for at nævne de gængse. Disse typer af alkoholiske drikke indeholder forskellige procenter af alkohol. Alm. øl har en alkohol procent på 4.6%, vin fra 11 – 15 %, breezer indeholder typisk 4% alkohol, mens stærk spiritus fås i meget forskellige procenter, fra 20% til 80%.

Jeg vil indskrænke mig til udelukkende at se på konsekvenser af at drikke øl i forhold til bilkørsel. Nogle tilsvarende beregninger kan udføres for vin- eller spiritusdrikkere.

Case: **En person drikker hurtigt efter hinanden 5 almindelige øl.**

Hvad betyder det, og hvor realistisk er det, at man indtager 5 almindelige øl hurtigt efter hinanden?

Hensigten med denne lidt hypotetiske situation er, at personen indtager alkohol svarende til alkoholen i 5 almindelige øl, uden at der er udskilt eller nedbrudt noget af betydning af alkoholen. Det kræver også en god "sund" tørst for hurtigt at drikke 5 øl. "Hurtigt" dækker her over den tid, der går fra at man starter med at drikke øl, indtil der er nedbrudt en nævneværdig mængde alkohol i leveren.

Det første jeg vil gøre mig klart er, hvor meget alkohol der faktisk er i disse 5 øl. I en øl er der 4.6% af 33 cl rent alkohol og da 1cm^3 alkohol vejer 0.7873 g vil der i 5 øl være

$$5 \cdot 0.046 \cdot 0.33 \cdot 0.7873 \cdot 1000 \ gram = 59.76 \ gram$$

Hvad giver det så af promille i blodet? Den promille man taler om i forbindelse med bilkørsel er antal gram alkohol pr. liter kropsvæske. I [Rusmidlernes biologi] nævnes "Alkohol fordeler sig i kroppens vand. Dette udgør ca. 60% af legemesvægten hos mænd og ca. 55% hos kvinder". Jeg antager, at personen er en mand på 70 kg.

Så må det give

$$59.76\text{g}/(0.60 \cdot 70\text{kg})‰ = 1.42‰$$

Øvelse 1: Beregn *din* alkoholpromille ved hurtig indtagelse af de 5 øl.
Beregn derefter *din* alkoholpromille ved hurtig indtagelse af en halv flaske rødvin, 14% alkohol. En flaske rødvin indeholder 0.75 liter.

Nu er mænd jo forskellige, alle vejer ikke 70 kg. Lad mig beskrive sammenhængen mellem vægt og promille for mænd, der lige har indtaget 5 øl.

Lad variablen x stå for antal kilo en mand vejer og lad f være funktionen, der angiver promillen for en mand på x kilo ved indtagelse af 5 øl.

Kompetencekommentarer til side 80

Anvendelse af Symbol- og formalismekompetence, da der sker en form for oversættelse fra almindeligt sprog til en regneforskrift.

Repræsentationskompetencen er i brug, da funktionen f er udtrykt på to forskellige måder, nemlig ved en regneforskrift og ved en graf.

Her annonceres et problem: "Hvor meget alkohol manden på 70 kg har tilbage ..... ." Det er v.hj.a. problembehandlingskomptencen at dette problem er blive opstillet.

Oplysningen om ændringen af alkohol i kroppen konstant er 8 gram pr. time, er sandsynligvis ikke en fuldstændig korrekt oplysning. Set fra dette perspektiv har Modelleringskompetencen været anvendt for at fremskaffe denne tilskårede oplysning. Men nu står her altså, at ændringen konstant er 8 gram pr. time. Og så anvendes Problemløsningskompetencen til at løse problemet med, nemlig ved at opstille differentialligningen og bestemme den partikulære løsning.

Korrektheden i bestemmelsen af den partikulære løsning er gjort v.hj.a. Symbol- og formalismekompetencen (selve symbolmanipulationen).

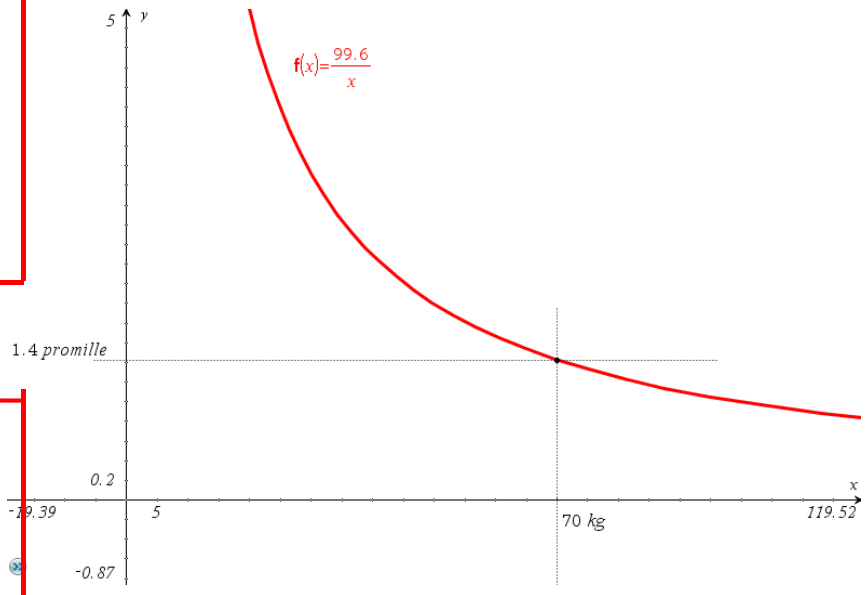
De 59.76 g alkohol udgør følgende promille af de x·0.60 l væske en mand indeholder

$59.76\text{g}/(0.60\cdot x)‰ = 99.6/x$

så derfor har f regneforskriften

$$f(x) = \frac{99.6}{x}, \text{for } x > 0.$$

Det grafiske billede af funktionen ses her, sammen med resultatet fra før med en 70 kg tung mand:



Da der sandsynligvis er en ligefrem proportional sammenhæng mellem mængde vand og mængde blod i en menneskekrop, vil en alkoholpromille være et udtryk for mængden af alkohol i blodet.

Nedbrydning af alkohol

Nu kommer alkoholen jo ud af kroppen igen ved nedbrydning i leveren. I [Rusmidlernes biologi, s.43] nævnes "Undtagelsen er alkohol, der metaboliseres ligefrem proportional, altså samme mængde pr. tidsenhed. … Dette svarer til 8 gram ren alkohol pr. time"

Jeg vil undersøge, hvor meget alkohol manden på 70 kg har tilbage t timer efter indtagelsen af de 5 øl uden yderligere indtagelse.

Da der her oplyses ændringen af alkohol i kroppen er konstant 8 gram pr. time kan man opstille følgende differentialligning:

$$y' = k = -8$$

hvor y angiver mængden af antal gram tilbage i blodet til tid t. Løsningen til ligningen er jo

$$y = g(t) = k\cdot t + b = -8\cdot t + b.$$

I vores situation har vi startbetingelsen, at der er indtaget de 5 øl, hvilket gav de 59.67 g rent alkohol, så $g(0) = 59.67$.

$$g(0) = -8\cdot 0 + b = 59.67 \Leftrightarrow b = 59.67 \text{ og dermed } g(t) = -8\cdot t + 59.67 \text{ for } t \geq 0.$$

Kompetencekommentarer til side 82

Hvilke t-værdier gør at g er nul?" er et spørgsmål dannet v.hj.a. Tankegangskompetencen. Det er væsentligt for anvendelse af Tankegangskompetencen, at det er et anliggende af egentlig matematisk art.

Oversættelse af tallet 7.46 til sætningen "så der går ca. de 7.5 time" involverer igen Symbol- og formalismekompetencen.

Øvelse 2: Forhold dig til, om det er rigtigt at alkohol nedbrydes lineært over tid og om nedbrydningen kunne tænkes at afhænge af andre faktore/variable end af tiden.

Du kan lade følgende udsagn, det første fra Katrine Egelund Pedersen, Molekylærbiolog, Ph.d., og det andet fra Politiken, indgå i dine overvejelser.

”Enzymers reaktion med deres substrat er oftest afhængig af substrat-koncentrationen, således at reaktionshastigheden stiger med denne til et maksimum, hvor alle enzymer er mættede med substrat. Det vil altså sige at selve mødet/bindingen mellem enzym og substrat er hæmmende for reaktionshastigheden.

I tilfældet, hvor nedbrydningen er lineær må mødet/bindingen mellem enzym og substrat ikke være den begrænsende faktor, men derimod nok tiden for omdannelsen af substratet i enzymet, som vil være konstant.

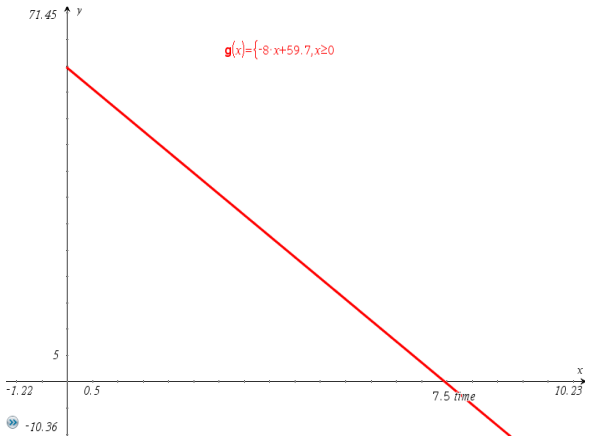
Denne situation kan forekomme fx når der enten er voldsomt overskud af substrat i forhold til enzym, eller når enzymets affinitet for substratet er voldsomt høj, så deres initielle møde ikke begrænser reaktionen.”

Betydningen af ordet ”affinitet” er ifølge [DenStoreDanske] ”inden for kemi to stoffers tilbøjelighed til at reagere med hinanden” og betydningen af ordet ”substrat” er ”stof, hvis kemiske opbygning ændres af et enzym”.

[Politiken]: ”Rigmor Zobel Ravn blev idømt en bøde på 20.000 kroner for at have købt 6 gram kokain til eget forbrug”

Øvelse 3: I **øvelse 2** er der et udsagn som skulle stamme fra en ekspert indenfor feltet molekylærbiologi. Er det videnskabsteoretisk i orden at inddrage et sådan udokumenteret udsagn?

Funktionen g er jo en lineær funktion og dens graf er tegnet til højre:



Det ses, at alkoholen vil være ude af kroppen på den 70 kg. tunge mand efter ca. 7.5 time.

Dette kan også udregnes ved at bestemme de t-værdier, som løser ligningen

$$g(t) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-8 \cdot t + 59.67 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-59.67}{-8} = 7.46$$

så der går ca. de 7.5 time.

Kompetencekommentarer til side 84

Beskrivelsen af sammenhængen mellem promille og tid er det aktuelle problem. Så det at opstille dette problem er gjort ved brug af Problembehandlingskompetencen.

Denne formalisering af de fysiske forhold sker ved betjening af symboler, så her benyttes Symbol- og formalismekompetencen.

Dette er jo en bestemmelse af nogle konstanter, ud fra en definition og en formel. Så her benyttes Symbol- og formalismekompetencen. Dog er der en simpel brug af Ræsonnementskompetencen til at gøre det let at bestemme sammenhængen mellem promille og tid. Nemlig den, at vide, at det er en lineær sammenhæng og derfor at det kun er nødvendigt at bestemme to konstanter.

"Hvilken t-værdi gør h50 til at være lig med 0.5?" kunne spørgsmålet have lydt i denne situation. Betragtet på denne måde er det Tankegangskompetencen der er anvendt. Men mere realistisk set er det Symbol- og formalismekompetencen, der anvendes til at oversætte fra problemstilling til ligning.

Øvelse 4: Bestem ud fra de ovenstående oplysninger, hvor lang tid der går, før *du* efter den hurtige indtagelse af den halve flaske rødvin i **øvelse 1** igen er ædru.

Det er nu relevant at få beskrevet sammenhængen mellem promille og tid. Promillegrænsen for bilkørsel her i Danmark er 0.5‰ som angivet i færdselsloven. Igen ser jeg på situationen for mænd, der hurtigt har drukket 5 øl.

Jeg indfører

t: antal timer efter de 5 øl er drukket

h_{70}: funktionen der angiver promillen efter t timer hos mænd med vægt 70 kg, der hurtigt har drukket 5 øl.

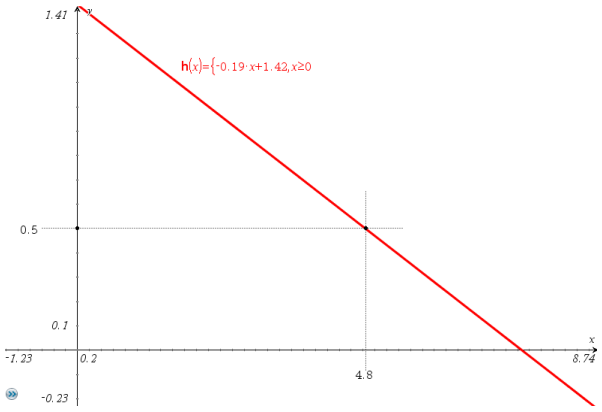
Da vi ved, at h er en lineær funktion, er det udelukkende konstanterne a og b i regneforskriften $h_{70}(x) = a \cdot t + b$ der skal bestemmes:

$b = 1.42$ som jo er start promillen

$$a = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{-8/(0.60 \cdot 70)}{1} = -0.190, \text{ så}$$

$h_{70}(t) = -0.190 \cdot t + 1.42$ for $t \geq 0$

Det grafiske billede af h_{70} ses til venstre, hvor det samtidigt er muligt at aflæse, at det tager ca. 4.8 time, inden det igen er tilladt at føre bil.



Nu kan man så spørge "Jeg vejer kun 50 kg, så hvor langt tid går der før jeg må køre bil?"

I denne situation gælder, at til tid nul opnås den maksimale promille, som er $f(50)$, og derfor må h's regneforskrift ændres til

$$h_{50}(t) = -0.190 \cdot t + f(50)$$

og spørgsmålet besvares ved at løse ligningen

$$h_{50}(t) = 0.5 \Leftrightarrow -0.190 \cdot t + \frac{99.6}{50} = 0.5 \Leftrightarrow t = (0.5 - \frac{99.6}{50}) / -0.190 = 7.9.$$

Du, som vejer 50 kg, må køre bil igen efter ca. 7.9 time.

Kompetencekommentarer til side 86

Der fås nye og bedre informationer om virkeligheden. Det skal der så tages højde for i den model der benyttes. Det er Modelleringskompetencen der anvendes.

Der er usikkerhed om hvad der virkelig gælder i den fysiske verden. Dette giver anledning til at træffe en model-beslutning. Så igen har Modelleringskompetencen været anvendt.

Her er vi ovre i model-verdenen, uden at forholde sig til den fysiske verden. For at beskrive sammenhængen mellem vægt og forbrændingstid træffes en beslutning, så denne beslutning må være truffet v.hj.a. Problembehandlingskompetencen.

Her gives et argument for at der ikke er en 100% lineær sammenhæng. Det sker ved benyttelse af Ræsonnementskompetencen.

Øvelse 5: Bestem hvor lang tid der går, før du igen må køre bil/har en promille under 0.5‰, efter den hurtige indtagelse af den halve flaske rødvin i **øvelse 1**.

Forbedring af modellen

Det er ikke korrekt, at man nedbryder 8 g alkohol, uafhængigt af hvem man er. I [Sundhedsstyrelsen publikation om alkohol] oplyses følgende sammenhæng mellem en persons vægt og tiden for at nedbryde en genstand. Begrebet en genstand er defineret som en alkoholisk drik med 12 g alkohol. Som det ses, er der stor variation i tiden for nedbrydningen.

Vægt	Minimum tid	Maksimum tid
60	1.33	2.00
70	1.15	1.72
80	1.00	1.50
90	0.88	1.33
100	0.67	1.20

Tabel 1: Så lang tid er du om at nedbryde en genstand, måling i kilo og timer.

Umiddelbart foreligger der ingen oplysning om, hvordan fordelingerne er i for de enkelte vægtklasser, ligesom der ikke er oplysninger om hvor mange målinger, der er foretaget. Jeg antager, at målingerne ikke giver anledning til at forkaste, at de stammer fra en jævnt fordelt stokastisk variabel. Derfor vil jeg tillade mig at benytte midtpunkterne i tids-intervallerne, som et udtryk for en værdi, der præsenterer nedbrydningstiden for en genstand for en person med den tilhørende vægt.

Vægt	Nedbrydningstid
60	1.67
70	1.44
80	1.25
90	1.11
100	0.94

Tabel 2: Nedbrydningstid som intervalmidtpunkt

Jeg vil give en matematisk beskrivelse af sammenhængen mellem vægt og forbrændingstid.

Umiddelbart ses, at der ikke er en 100% lineær sammenhæng, da der til ens Δt-værdier ikke er ens Δy-værdier.

Øvelse 6: Forklar i detaljer, hvorfor der ikke er en 100% lineær sammenhæng mellem vægt og nedbrydningstid.

Kompetencekommentarer til side 88

Hvis disse regressioner udføres v.hj.a. regnemaskine eller computerprogram, så har Hjælpemiddelskompetencen være benyttet.

Øvelse

Efter denne gennemgang af benyttede matematikkompetencer i de første fem sider, er det nu din tur. Afklar hvilke kompetencer der benyttes i indholdet af de næste sider tekst. Du kan, evt. ved brug af en kompetence, gøre klart

- Hvad der er for en egenskab ved kompetencen der er i spil
- Hvordan det udmønter sig her i teksten
- Evt. hvorfor det ikke er en nabo-kompetence, der burde anføres.

Jeg vil forsøge mig frem med forskellige modeller til beskrivelse af dataene, modeller bestemt ved regression.

Regressionstype	Forklaringsgrad, R^2
Lineær regression	0.9917
Andengradsregression	0.9981
Potensregression	0.9915
Eksponentiel regression	0.9979

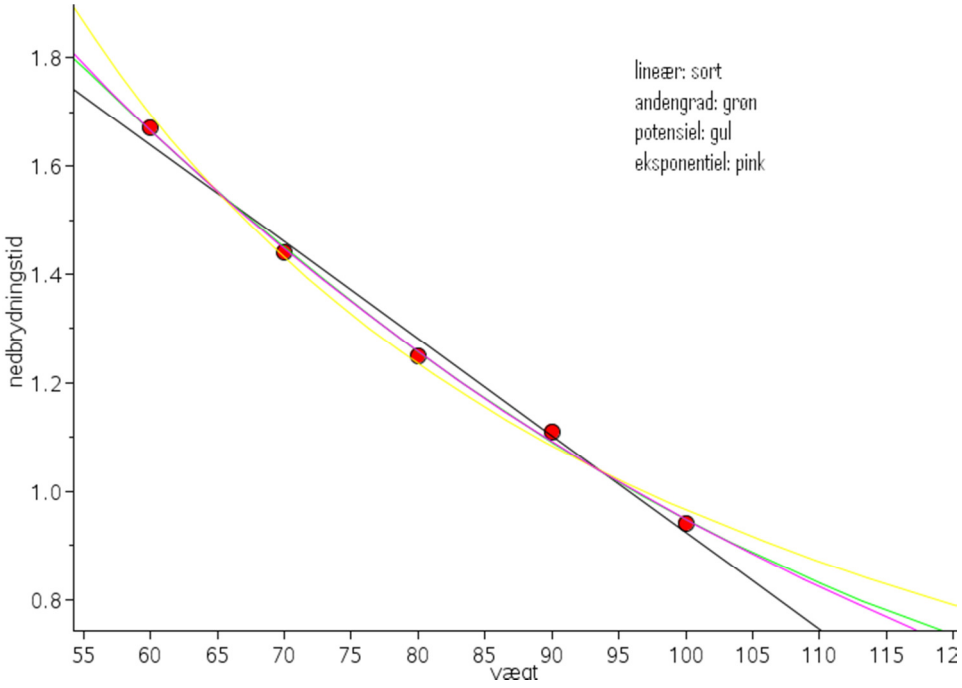
Tabel 3: forklaringsgrader

Forklaringsgraden R^2 til de enkelte regressioner er udtryk for hvor mange procent den enkelte model (den lineære, den kvadratiske, den potensielle og den eksponentielle) giver mindre i variation end en helt "tilfældig" model, se [Tænk med en graf] for nærmere forklaring.

Øvelse 7: Check om den eksponentielle models forklaringsgrad virkelig er 0.9979.

Da almindeligvis en model regnes for acceptabel, når R^2 er over 0.95, og glimrende, når R^2 er over 0.99, må vi her konstatere, at alle de afprøvede modeller er glimrende til at beskrive dataene, men evt. se [Tænk med en graf].

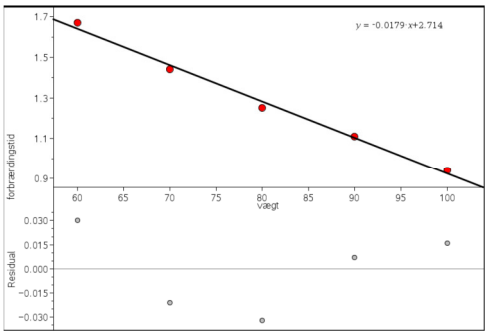
For at lave en grafisk kontrol tegner jeg de grafiske billeder af disse regressionerne op sammen med dataene.



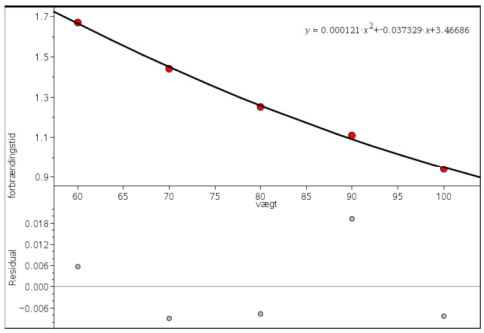
Der er ikke nogle af punkterne, som afviger radikalt fra regressionskurverne. Umiddelbart ser der ud til at være en tendens til at dataene skal modelleres med en model der beskriver en krumning.

Kompetencekommentarer til side 90

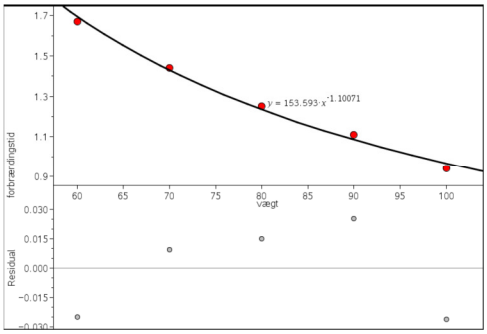
Øvelse 8: Hvad er formålet med at lave en grafisk kontrol af modellerne?



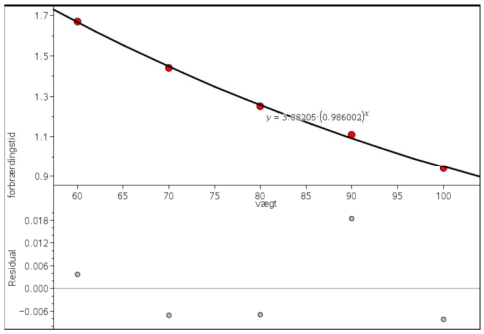
Den lineære regression og dens residualer



Den kvadratiske regression og dens residualer



Potensiel regression og dens residualer



Eksponentiel regression og dens residualer

Udfra de enkelte modellers residualer (afvigelse mellem data og beregnede data) kan jeg se, at der for den lineære og den potensielle model er en krumningstendens, mens for den kvadratiske og den eksponentielle er et mere tilfældigt billede. Det tyder altså på, at der ikke er en systematisk afvigelse ved andengrads- og eksponentielmodellen.

Øvelse 9: Det lyder til, at der er et problem, når en models residualer har et systematisk forløb. Hvad kan det bestå i?

Da forklaringsgraden, R^2, både for andengrads- og eksponentiel-modellen er tæt på én samt at disse to tal adskiller sig meget lidt fra hinanden, gør at jeg på anden vis vil forsøge at afgøre hvilken model, jeg skal vælge. Jeg ser på modellernes afvigelser fra de faktiske data.

Kompetencekommentarer til side 92

	A vægt	B forbrændingstid	C kvadratisk	D eksponentiel	E kvadsum_afv_f10	F kvadsum_afv_f11
◆			=f10(vægt)	=f11(vægt)		
1	60	1.67	1.66429	1.66622	0.000606	0.000516
2	70	1.44	1.44886	1.44714		
3	80	1.25	1.25771	1.25686		
4	90	1.11	1.09086	1.09161		
5	100	0.94	0.948286	0.948079		
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						

E1 =sum((forbrændingstid−kvadratisk)²)

Tabel over data, værdier ved regression og kvadratsum afvigelser

Her kan jeg se, at den eksponentielle regression bedst beskriver dataene. For alle vægtene er den eksponentielle beskrivelse tættere på de oprindelige data end andengrads-beskrivelsen er. Dette mønster ses også i kvadratsums afvigelserne, hvor afvigelsen for den eksponentielle model er den mindste.

Øvelse 10: Hvad forstås ved kvadratsums afvigelserne og hvorfor er de relevante at betragte?

Derfor benytter jeg den eksponentielle model til at beskrive dataene:

$$f(x) = 3.88 \cdot 0.98600^{x}, \text{ for } x \in [60;100],$$

hvor f angiver tiden i timer for at nedbryde alkoholen i en genstand og x angiver vægten af personen, der har indtaget genstanden.

Lad os nu se, hvad en 70 kg tung mand kan forbrænde på en time. Han tager $f(70)$ timer for at forbrænde en genstand og en genstand indeholder 12 g alkohol, dvs. at han på en time forbrænder $12/f(70)$ gram = 8.29 gram, altså lidt mere end tommelfingerreglen på de 8 gram.

Større mennesker har sandsynligvis en større lever end mennesker af mindre størrelse. Dette argument giver god grund til at tro, at denne beskrivelse givet ved funktionen f, der jo afhænger af variablen x (vægt), er en bedre beskrivelse end den forrige beskrivelse. Den forrige beskrivelse angav jo bare at man, uafhængigt af vægt, nedbrød 8 gram alkohol pr. time.

Nu kommer det dog sandsynligvis an på hvad man er blev stor af. Jeg tror, at hvis man er blevet stor pga. et godt fedtlag eller har trænet sig til store muskler, så er ens lever ikke vokset tilsvarende. Dette er nok en af årsagerne til de bredde intervaller i tabel 1, f.eks. at vægten 60 kg, giver en nedbrydningstid på 1.33 – 2.00 time.

Kompetencekommentarer til side 94

Funktionen *f* er ikke på nogen måde perfekt til beskrivelsen af nedbrydningstiden, da nedbrydningstiden må afhænge af yderligere faktorer udover vægten. Derfor kan *f* ikke være andet end en ny og bedre tommelfingerregel til beskrivelse af tiden til nedbrydningen af en genstand.

Øvelse 11: Ved brug af denne model, hvor lang tid går der, inden *du* har en promille på 0.5‰ efter indtagelse af den halve flaske vin i **øvelse 1**?

Indtagelse og nedbrydelse af andre rusmidler end alkohol

Som vi hørte i [Rusmidlernes biologi] afhænger nedbrydningen af rusmidlet af dets koncentrationen i blodet, som jo er ligefrem proportionalt med den mængde der er indtaget (antaget forgået i løbet af et kort tidsrum). Nedbrydelsen af rusmidler foregår ved enzym binding og som indikeret i **øvelse 1**, så foregår nedbrydelsen oftest ligefrem proportionalt med koncentrationen af rusmidlet.

Det har desuden ved målinger vist sig, at for alle rusmidler (undtaget alkohol) kan sammenhængen mellem mængden af rusmiddel i kroppen og størrelsen af nedbrydelsen altså ændringen i mængden beskrives ved en ligefrem proportionalitet. Matematisk kan det udtrykkes

$$y' = k \cdot y$$

hvor $y(t)$ angiver mængden af rusmidlet i kroppen til tid t og hvor k er en negativ konstant. Løsningen til denne differentialligning er

$$y(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$$

hvor c er en konstant. Så nedbrydningen af rusmidler foregår mængdemæssigt eksponentielt i forhold til tid. Angående indtagelse og nedbrydning gælder der de samme overordnede forhold ved medicin som ved disse andre rusmidler.

Øvelse 12: Check at $y(t)$ er løsning til differentialligningen.

Ændring af færdselsloven

Der er mange forskellige rusmidler. Her skal bare nævnes nogle få: hash, heroin, kokain, fantasy. Disse stoffer nedbrydes med forskellige hastigheder og da stofferne har forskellige virkninger indtages de i meget forskellige mængder.
Ifølge færdselsloven må man ikke være påvirket af rusmidler så "at man er ude af stand til at føre køretøjet på fuldt betryggende måde". I 2007 kom der er ændring til færdselsloven med en såkaldt "nul-grænse". Nul-grænsen betyder, at det er strafbart at køre bil med bare den mindste smule af ulovligt stof i blodet, altså en grænse på nul milligram. Når stof nu nedbrydes eksponentiel i leveren, vil man teoretisk set aldrig blive helt af med rusmidlet igen, da der ifølge modellen altid vil

Kompetencekommentarer til side 96

være noget tilbage i kroppen. Det kan selvfølgelig ikke være hensigten med nul-grænsen, at de personer som først én gang har fået rusmiddel i kroppen aldrig mere kan komme til at føre et køretøj.

Øvelse 13: Hvorfor vil der for altid ifølge modellen være rusmiddel tilbage i kroppen? Er modellen realistisk på dette punkt?

Uden at jeg skal gøre mig klog på det, vil jeg mene, at de målemetoder man anvender, altid vil have en fejlmargin. Så når man tager højde for fejlmarginen, vil der være en nedre måle-grænse, neden for hvilken man ikke kan garantere, at den sande værdi ikke er nul gram stof i kroppen.

Øvelse 14: Kan man som opgaveskriver, tillade sig ikke at have konkret information om et emne og alligevel lade det indgå i beskrivelsen?

Her vil jeg kun betragte rusmidlet hash. I hash er det stoffet THC, som giver rusen. THC nedbrydes med en halveringstid på 2 til 5 døgn i leveren.

Case: **En person optager 25 mg THC i blodet ved hashrygning.**

Fra [Rusmidlernes biologi]: "Ryger en person, for at opnå maksimal ruspåvirkning, 1 g hash indeholdende 5% THC, er der 50 mg THC til rådighed. Ved rygning optages kun halvdelen, altså 25 mg i blodet, resten ødelægges ved pyrolyse, udåndes eller bliver tilbage i piben. Når hjernen har optaget ca. 1% svarende til 0,25 mg, vil personen være maximalt ruspåvirket og derfor ophøre med stofindtagelsen".

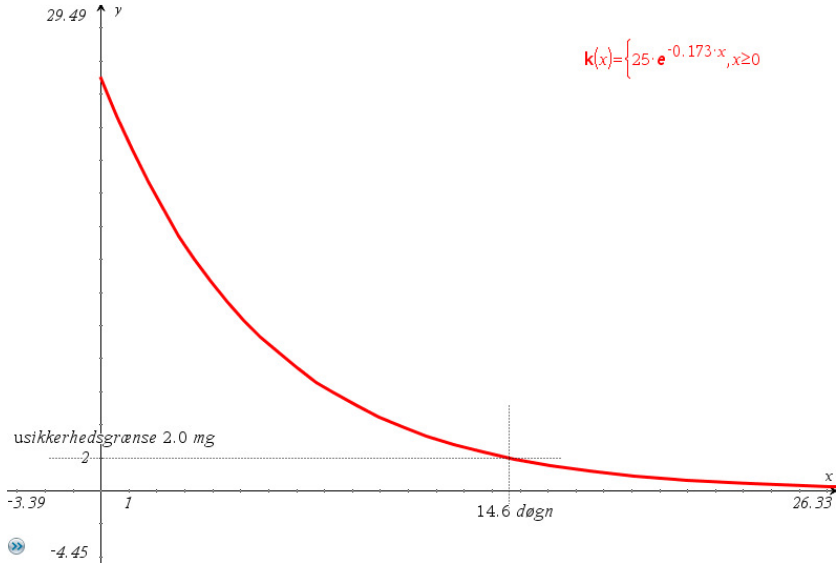
Lad mig i første omgang antage, at for en bestemt person har THC en halveringstid på 4 døgn. Desuden lad mig antage, at de målemetoder der benyttes i forhold til THC, ikke med sikkerhed kan give en måleværdi på under 2 mg i kroppen. Det sikre, at man ikke kan blive taget i ulovlig kørsel pga. indtagelse af hash, når man har under 2 mg THC tilbage i kroppen.
Det første jeg vil undersøge er, hvor lang tid der går, inden der er under 2 mg THC tilbage i kroppen. Først bestemmes funktionen, som beskriver mængden i milligram af tilbageværende THC i kroppen t timer efter indtagelse. Fra før vides, at der kan beskrives ved en aftagende eksponentiel funktion. Jeg ved, at $T_{½} = 4$ døgn og der gælder at $T_{½} = \log(½)/\log(e^k)$, hvor k er en konstant, der udtrykker den aktuelle nedbrydnings hastighed. Det er nu muligt at bestemme konstanten k ud fra denne ligning

$$T_{½} = \frac{\log(½)}{\log(e^k)} = \frac{\ln(½)}{\ln(e^k)} = \frac{\ln(½)}{k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln(½)}{T_{½}} = -0.17328$$

Kompetencekommentarer til side 98

Konstanten c skal også bestemmes. Den angiver mængden af stof i kroppen til tid nul. Da der er optaget 25 mg i kroppen, må $c = 25$. Så forskriften for funktionen er

$$k(t) = 25 \cdot e^{-0.17328 * t} \text{, for } t > 0.$$



Det grafiske billede af funktionen k ses til højre. Ud fra dette kan jeg se, at først efter 14 -15 døgn er det igen muligt at køre bil, uden at blive taget i ulovlig kørsel pga. hashrygning.

Jeg kunne selvfølgelig også have løst ligningen $k(t) = 2$:

$$25 \cdot e^{-0.17328 \cdot t} = 2 \Leftrightarrow e^{-0.17328 \cdot t} = \frac{2}{25} \Leftrightarrow -0.17328 \cdot t = \ln(2/25) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2/25)}{-0.17328} \cong 14.58 \text{ døgn.}$$

Det er umiddelbart lang tid, man ikke må køre bil, men den vurdering afhænger selvfølgelig af ens kørselsbehov.

Øvelse 15: Forstil dig, at der er blevet udviklet en ny og mere præcis målemetode med en usikkerhedsgrænse på kun 1 mg rusmiddel i kroppen. Hvor lang tid skal man undgå at køre bil, for ikke at blive taget i ulovlig kørsel?

Lad mig nu betragte de to ydre grænser for halveringskonstanten for nedbrydningstiden af THC, nemlig $T_{½} = 2$ døgn og $T_{½} = 5$ døgn. For disse vil jeg gerne angive den tilhørende tidsgrænse for kørsel.

Ved benyttelse af samme fremgangsmetode som for $T_{½} = 4$, fås følgende

$T_{½} = 2$	$T_{½} = 5$
$k = -0.346573$	$k = -0.138629$
$k(t) = 25e^{-0.346573t}$	$k(t) = 25e^{-0.138629t}$
Under 2 mg: 7.29 dage	Under 2 mg: 18.22 dage

Tabel 4: under 2 mg THC.

Kompetencekommentarer til side 100

Det ses, at der går fra 7 til 18 dage, før THC'en er ude af kroppen i tilstrækkelig grad, til at undgå at blive dømt på nulgrænsen. Da du sandsynligvis ikke kender din personlige halveringstid for nedbrydning af THC i din krop, er én løsning, altid at vente 18 dage fra indtagelse af 25 mg THC til du igen sætter dig bag rattet.

Fra [Rusmidlernes biologi]: "Når hash indtages ved rygning, passerer det aktive stof hurtigt fra den indåndede røg via lungerne over i blodet. I løbet af minutter stiger koncentrationen af THC i blodet til mellem 100 og 500 nanogram (ng) pr. ml blod. Da THC som nævnt er fedtopløseligt, kan det ikke i fri form blande sig med blodets vandfase. Det bindes derfor til nogle proteinstoffer i blodet, der er vandopløselige, og transporteres på denne måde rundt i organismen. Efter ca. 4 timer er koncentrationen af THC i blodet faldet til nogle få ng. pr. ml blod. Dette er ikke udtryk for en metabolisering af THC, men skyldes en deponering i kroppens fedtvæv og organer som hjerte, lunger, milt, brystkirtler og moderkage".
Da koncentrationen i blodet er faldet til et så lavt niveau, vil der ikke komme meget nyt THC til hjernen. Derfor vil man muligvis ikke vedblive med at være ruspåvirket i det antal dage som regnestykket viser, men ikke desto mindre er der altså mindst de 2 mg tilbage i kroppen i det angivne antal dage.

Konklusion

Nedbrydningsevnen af alkohol afhænger af personens vægt, tiden siden indtagelsen af alkoholen og andre personlige forhold. For den enkelte person er der en lineær sammenhæng mellem alkoholpromillen og tid siden indtagelsen af alkoholen. For at bestemme tiden indtil promillen igen er under 0.5‰, benyt som tommelfingerregel at følgende udtryk

$$(\text{antal genstande} - (0.5/1000 \cdot 0.60 \cdot x \cdot 1000)/12) \cdot f(x) = (\text{antal genstande} - 0.025 \cdot x) \cdot f(x)$$

angiver tiden målt i timer, inden alkoholpromillen er under 0.5‰, hvor f er funktionen fra afsnittet om den forbedrede model og hvor x angiver personens vægt i kilo.
Nedbrydningsevnen af andre rusmidler afhænger af tiden og andre personlige forhold. For den enkelte er der en eksponentiel sammenhæng mellem mængden af stof tilbage i kroppen og tiden der er gået siden indtagelsen af stoffet. Men der er store personlige forskelle på hvor hurtigt nedbrydelsen foregår, se tabel 4. Derfor, for at undgå at blive tage i ulovlig kørsel pga. rusmiddelindtagelse, vær klar over at det tager rigtigt lang tid, op til 20 dage, før niveauet af rusmiddel i kroppen er under en given måle-usikkerhedsgrænse.
En forskel på de klasser af rusmidler, alkohol og andet rusmiddel, er at der typisk går der væsentligt længere tid for nedbrydningen af disse andre rusmidler end der gør for alkohol. Nedbrydelse af alkohol regnes i timer, mens nedbrydelse af disse andre rusmidler typisk regnes i døgn.

Øvelse 16: Argumentér for korrektheden af udtrykket, der angiver antal timer inden alkoholpromillen igen er under 0.5‰.
Tegn grafer for faste antal genstande (3 genstande og 7 genstande), for hvor lang tid det tager inden alkoholpromillen er under de 0.5‰ og aflæs dine *egne* tidsgrænser for sikker kørsel.

Øvelse 17: Er der belæg for alle delene af konklusionen eller er der nogle som er for let købt?

Litteratur

[Rusmidlernes biologi] *Rusmidlernes biologi – om hjernen, sprut og stoffer* af Henrik Rindom

[Tænk med en graf] *Tænk med en graf* af Bjørn Felsager og Gert Schomacker

[Sundshedsstyrelsens publikation om alkohol]
http://www.sst.dk/publ/Publ2006/CFF/Uge40/Faa_mere_at_vide_06.pdf

[DenStoreDanske] http://www.denstoredanske.dk

[Politiken] http://politiken.dk/indland/article905963.ece

Opgaver

1. Identificer abstraktioner i dette skrift og beskriv dem ved uformelt at angive startområde, slutområde og hvor i abstraktionen består – altså angive det informationstab den skaber. Beskriv på denne måde mindst 4 abstraktioner.
   Eksempel på en abstraktion.
   Lad mig give den et navn: *trekant.*
   Startområde: figurer der minder om ”en trekant”, altså noget med tre sider, måske det også har en lille fjerde side, hvor siderne har en tendens til at være rette linjestykker og muligvis også noget andet.
   Slutområde: mængden af punktmængder, der er indesluttet af tre rette linjestykker. Hvert linjestykke skal i hvert af dets endepunkter være sammenhængende med et af de andre to linjestykker.
   Abstraktionen: Fjerne alt overflødigt, så som at sider ikke er helt rette, så som en ekstra lille, lille side, så som at det indgår i en hel andet overordnet struktur.

2. Undersøg om abstraktionerne i opgave 1 kan give årsag til begrænsninger i konklusioner. Med andre ord, find om muligt, steder hvor abstraktionerne er for grove til at give en korrekt relevant beskrivelse af situationen den benyttes i.

3. Giv eksempler på at der i skriftet anvendes matematisk sprog til at formulere problemstillinger. Herunder kan du f.eks. anvise, hvor der benyttes symboler for variabelstørrelser, oversættelse frem og tilbage mellem naturligt sprog og symbolholdigt sprog og undersøge om der skjulte variable på spil i nogle sammenhænge.

4. Identificer fra dette skrift brug af den aksiomatiske-deduktive metode. Det behøver ikke at være strengt matematiske brug af den aksiomatiske-deduktive metode. F.eks.: ”Mit navn er Jakob (definition). Hvis du hedder det samme som mig, så har vi ens navne (aksiom). Du hedder det samme som mig. Derfor hedder du Jakob.”

Elementær videnskabsteori? There ain't no such thing

Af Jørgen Ebbesen

Det gennemgående spørgsmål i matematiks videnskabsteori er: "Hvad er matematik?"

Spørgsmålet viser sig langt sværere at svare på, end man umiddelbart skulle tro. Det lette svar: "Matematik er det, som matematikere beskæftiger sig med" er ikke så dumt og naivt, som det lyder, men udløser automatisk spørgsmålet: "Hvad er en matematiker så?"

Sagen er, at matematik er mange ting. I virkeligheden kan spørgsmålet slet ikke besvares, for svaret afhænger af den synsvinkel, man anlægger. Det er smadderirriterende, hvis man er opdraget inden for faget matematiks tradition, hvor de spørgsmål, vi stiller, har klare og entydige svar.

Matematik er en menneskelig aktivitet, eller rettere mange forskellige aktiviteter. Det er blandt andet et videnskabsfag med et hav af discipliner i rivende udvikling. Den tid er for længst overstået, hvor et enkelt menneske kunne sætte sig bare overfladisk ind i hele faget.

Matematik er en del af vores kulturarv. Historisk set har matematik og filosofi været tæt knyttet til hinanden. Forbindelsen er ikke længere så intim, som den har været, men filosoffer fra Platon over Déscartes til Bertrand Russel har betjent sig af matematik som inspiration og eksempel.

Matematik er en del af almindelige menneskers hverdag, en del af det sprog som vi beskriver og forstår verden med. Videnskabelige undersøgelser viser i øvrigt, at den matematik, almindelige mennesker betjener sig af, adskiller sig fra den, de lærte i skolen.

Matematik er også et undervisningsfag på mange niveauer. Matematik er fx et gymnasiefag, som beskrevet i læreplanen. Men læreplanen rummer ikke hele sandheden, for der findes en matematisk tradition, som ikke er styret af de kanoniske skrifter, men videreformidles i det kollegiale samvær i frikvarter, på kurser, til eksamen. Et typisk indslag ved censorfrokosten, hvor censor og eksaminator har følt sig frem til hinanden i løbet af de første eksaminationer, er en rysten på hovedet over de nyeste regler.

Det, at der er forskellige mulige angrebsvinkler, indebærer, at den vinkel, man vælger, automatisk afspejler, hvad man synes, at matematik bør være. Filosofisk er de to spørgsmål, hvad matematik ***er***, og hvad matematik ***bør*** være, principielt uafhængige, så vi er ude i noget snavs, men i praksis er spørgsmålene uadskillelige.

Når nu matematik er mange forskellige, men alligevel beslægtede fænomener, hvordan skal man så angribe spørgsmålet? Jeg vil med denne artikel argumentere for, at der er naturligt at anlægge et gymnasieperspektiv.

Et af de faglige mål i AT er ifølge læreplanen fra august 2010, at eleverne skal kunne

demonstrere indsigt i videnskabelig tankegang og gøre sig elementære videnskabsteoretiske overvejelser i forhold til den konkrete sag.

At ordet ***elementær*** benyttes i forbindelse med videnskabsteoretiske overvejelser kan umiddelbart virke ejendommeligt. Det er vist ikke nogen hemmelighed, at den videnskabsteoretiske side af AT for mange elever (og lærere) har virket påklistret og rituel. Vi tramper lidt rundt i den hermeneutiske cirkel, når vi har læst en tekst, og den hypotetisk-deduktive metode i de naturvidenskabelige fag, hvor teorier bekræftes eksperimentelt, men ingen viden er eviggyldig, fordi den pr. definition er falsificerbar. Og inden for samfundsvidenskab har vi kvantitative, kvalitative og komparative metoder. Til glæde for hvem?

Men der er et alternativ. Vi kunne i stedet for tage udgangspunkt i gymnasiefagene. Alene af den grund, at det er de fag, som eleverne kender. Jeg gør mig med andre ord til talsmand for, at vi skifter perspektiv og ser på noget, man kunne kalde ***gymnasiefagenes teori***. Eftersom udtrykket ***elementær videnskabsteori*** fra starten er indholdstomt, kan vi definere os ud af problemerne og vælge et indhold, som er meningsfyldt for de involverede lærere og elever. Det er godt nok at stramme den, for videnskabsteori er og bliver det ikke. Men taktikken ligger ikke så langt fra den noget pragmatiske udlægning af læreplanens ord, som de to AT-fagkonsulenter har gjort sig til talsmænd for.

Lad os for matematiks vedkommende lege lidt med tanken om, at vi har frit valg på alle hylder. Der er en håndfuld spørgsmål, der optager mig som lærer:

- Hvad er matematik?
- Hvad gør matematik til noget særligt?
- Hvad skal eleverne lære i matematik og hvorfor?
- Hvad vil det sige at være god til matematik?
- Hvordan lærer man matematik, og hvorfor er det så svært?

Disse spørgsmål burde for mig at se være de centrale i gymnasiefagets teori. Læg mærke til, at de to første spørgsmål er videnskabsteoretiske, men at svarene må forholde sig til gymnasiefaget, hvis det skal give mening for eleverne. De sidste tre spørgsmål er snarere fagdidaktiske. Men spørgsmål, som jeg anser for vigtige at diskutere med eleverne. Som måske kan hjælpe nogle af dem til at knække nogle koder.

Indholdet skal ikke opfindes fra bunden. Der findes masser af brugbart fagdidaktisk såvel som videnskabsteoretisk materiale. Men der skal vælges ud og oversættes (fortrinsvis) fra engelsk. Og så må vi ikke glemme den enorme praktiske viden, der er til stede hos underviserne i gymnasiet. Den skal aktiveres, så dagsordenen ikke sættes af didaktikere med baggrund i undervisning på andre niveauer og traditioner.

Jeg vil ganske kort uddybe punkterne fra før.

- Hvad er matematik?

- Hvad gør matematik til noget særligt?

Jeg er fra en tid, hvor svaret var enkelt: det er sætninger og beviser. Og der var én metode – den aksiomatisk-deduktive, som er helt speciel for matematik. Inderst inde mener jeg det stadig, og det er en væsentlig del af svaret på, hvad videnskabsfaget matematik er. Men hvor meget aksiomatisk-deduktiv metode bruger vi egentlig i gymnasiet? De fleste beviser er hamrende trivielle (for os), eleverne forstår ikke, hvad de gør godt for, og vi er glade, hvis eleverne bare kan bruge resultaterne (jeg kan naturligvis kun tale for mig selv). Bevisarbejdet kulminerer i forbindelse med differentialregningen, hvor vi til gengæld bygger på et uklart grænseværdibegreb, hvilket udhuler beviserne noget.

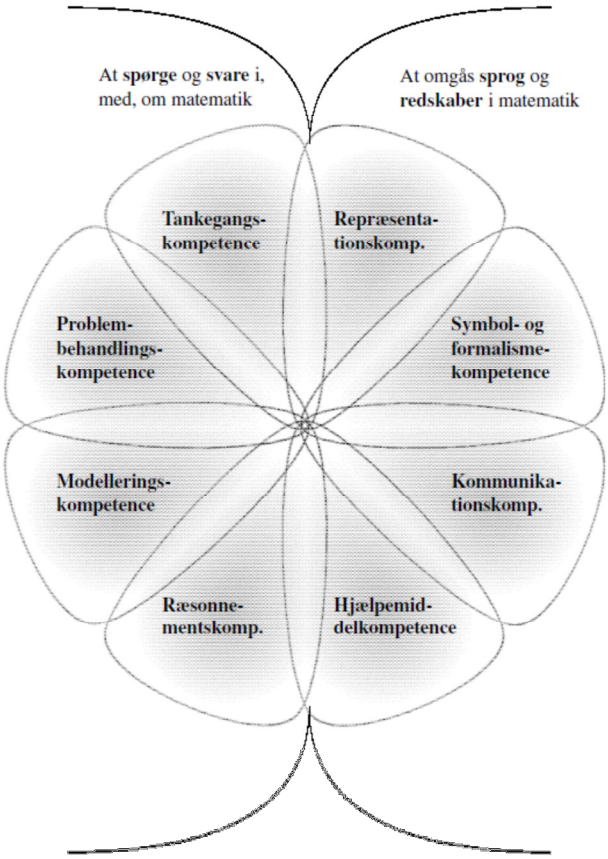
Hvis jeg skal forsøge at indfange det, vi rent faktisk gør i forbindelse med bevisgennemgangen, må det blive, at vi ud fra forholdsvis præcise definitioner og/eller givne forudsætninger (som ikke kan problematiseres!) vha. logikkens love opnår sikre resultater. Sproget (diskursen) i matematiktimerne adskiller sig markant fra hverdagssproget, de unge betjener sig af, ved sit krav til stringens: vi sløser alle med hverdagssproget, og alligevel forstår vi hinanden nogenlunde. Men selv mindre unøjagtigheder i den matematiske argumentation gør denne ubrugelig.

Beviser spiller under alle omstændigheder en mindre fremtrædende rolle i undervisningen end tidligere. Det hænger blandt andet sammen med et skift i matematiksynet fra det produktorienterede til det procesorienterede. Baggrunden for skiftet er en kritik af den traditionelle matematikundervisning, hvor matematikken blev præsenteret som en række eviggyldige resultater, der følger logisk af nogle ganske få forudsætninger. Ifølge kritikken giver dette et falsk billede af, hvad matematik er. Fordi matematikkens sætninger er slutproduktet af en lang proces, hvor matematikere har undersøgt hypoteser, som de har forkastet helt eller delvis. På denne baggrund har de formuleret nye hypoteser, som de har forkastet helt eller delvis osv. Det er processen frem til resultaterne, der ***er*** matematik. Og resultaterne er ikke så eviggyldige, som vi gerne vil give det indtryk af. Ikonet for dette skift er Imre Lakatos, hvis ***Proofs and Refutations*** (på dansk ***Beviser og gendrivelser***) har opnået kultstatus. Et ændret syn på, hvad det vil sige at lære (nemlig at eleven ***konstruerer*** sin viden selv) er medvirkende årsag til procesorienteringen. Læreplanens krav om eksperimentel matematik er en naturlig konsekvens af skiftet (og IT-værktøj, der gør det lettere at eksperimentere).

Skal eleverne slet ikke vide, at matematikken bygger på den aksiomatisk-deduktive metode? Jo, selvfølgelig skal de da det. Men som undervisere er vi nødt til at forholde os til, at vi ikke benytter den til daglig i gymnasiet. Der er nødt til at være overensstemmelse mellem det, vi fortæller eleverne er matematik (på gymnasieniveau forstås!), og det, vi rent faktisk bruger tiden på i matematikundervisningen. Kompetenceblomsten nedenfor kan hjælpe med at sætte ord på, hvad det er. Læseren kan som en lille øvelse tegne en blomst, hvor kronbladenes størrelse afspejler, hvor stor vægt, der lægges på kompetencerne i undervisningen.

Som jeg ser det, er der sket en drastisk ændring i blomsten i løbet af de 30 år, jeg har undervist i gymnasiet. I starten var modellerings- og hjælpemiddelbladet nærmest ikke-eksisterende. Nu er de altdominerende. Og vi bruger meget tid på en heroisk kamp med symbol- og formalismebladet, hvis vi da ikke resignerer og benytter CAS.

Denne prioritering skal indtænkes i vores beskrivelse af gymnasiefaget med en vægt, der modsvarer kronbladenes størrelse. Matematisk modellering er blevet den centrale matematiske metode i gymnasiesammenhæng.



Selv om jeg mener, at vi skal tage udgangspunkt i gymnasiefaget, skal vi ikke være blinde for, at der findes en verden uden for Verona. Den historiske dimension skal med: Hvor kommer matematikken fra, hvordan er den opstået, hvordan har den udviklet sig, og har synet på, hvad matematik er, altid været det samme? Glemmer vi vores historie, risikerer vi at miste vores identitet.

- Hvad skal eleverne lære i matematik og hvorfor?

Matematisk modellering og den fornødne symbol- og formalismekompetence er centrale. Demokratiargumentet er en vigtig del af argumentationen: en vis indsigt i modellering er en nødvendig forudsætning for at eleverne skal kunne agere som selvstændige, ansvarlige samfundsborgere. Om og hvordan vi indfrier dette mål, er et interessant spørgsmål.

- Hvad vil det sige at være god til matematik?

Målet er vist nok at skabe matematisk kompetente elever. I Kompetencerapporten fra 2002 defineres matematisk kompetence

Matematisk kompetence *består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå. Dette implicerer naturligvis en mangfoldighed af konkret viden og konkrete færdigheder inden for diverse matematiske områder, men matematisk kompetence kan ikke, jf. det foregående, reduceres til disse forudsætninger. (p. 44)*

Matematisk kompetence kan ifølge rapporten analytisk deles op i delkompetencerne i kompetence-blomsten. Det er svært at indvende noget mod, at eleverne skal være kompetente. Men jeg ser alligevel en uheldig nedprioritering af den æstetiske side af matematikken til fordel for den mere nyttebetonede. Tidligere eksisterede en klippefast tro på, at matematik havde en formaldannende virkning, dvs. at den logiske tænkning, vi trænede i matematikundervisningen, kunne overføres til andre områder. Det blev aldrig påvist, at denne overførsel rent faktisk fandt sted. Derimod viser talrige undersøgelser, at læring er situeret, dvs. at den viden man opnår i en bestemt sammenhæng, fx i matematiktimerne i skolen kun vanskeligt lader sig aktivere i andre sammenhænge. En af de store pædagogiske udfordringer består i at skabe en undervisning, der muliggør ***transfer***. Man kunne forstille sig, at det kunne lette arbejdet med modeller på et senere tidspunkt i uddannelses-forløbet, hvis eleverne arbejdede med hele modelleringsprocessen (og ikke bare den matematik-interne del) i gymnasiet. Men der er ingen garanti for, at det sker. Og ingen empiri, der kan af- eller bekræfte formodningen.

- Hvordan lærer man matematik, og hvorfor er det så svært?

Der findes næppe nogen kongevej til matematikken ;) Hvis der gjorde, skulle man tro, at den for længst var fundet. Der findes til gengæld en omfattende litteratur om matematiklæringsvanskelig-heder. Noget af den kunne måske hjælpe de elever, der slås med problemerne. Og naturligvis også de lærere, der skal planlægge undervisningen, så vanskelighederne imødegås.

Jeg vil i den forbindelse fremhæve den franske matematikdidaktiker Guy Brousseaus for begrebet ***Den didaktiske kontrakt*** til beskrivelse af en af hindringerne for, at læring finder sted:

Det er ikke sjovt at være i en situation, man ikke kan overskue, og hvor ens løsningsstrategier ikke slår til. Men det er den situation, vi bevidst anbringer eleverne i – det er nærmest en forudsætning for læring. Som Guy Brousseau bemærker, er det betingelser, som vi ikke ville byde voksne. Formålet med den stiltiende didaktiske kontrakt er at skabe den tryghed, der skal til i situationen. Kontraktbetingelserne er:

- Eleverne gør deres bedste

- Læreren giver eleverne de fornødne elementer til at situationen får en lykkelig udgang

Eleverne skal selv konstruere viden ud fra elementerne, men med mindre de forelagte problemer er trivielle, vil de være nødt til at indhente yderligere oplysninger fra læreren. Og det er her, man skal

være forsigtig. For hvis læreren sætter elementerne sammen, er det ham/hende, der konstruerer, og ikke eleverne. De bliver passive tilskuere i stedet og lærer intet. Problemet er, at det af mange grunde kan være fristende at hjælpe eleverne mere, end godt er og for tidligt. Måske yder dette ultrakorte referat ikke Guy Brousseau retfærdighed, men der er virkelig noget at komme efter. Og jeg er endnu mere uretfærdig over for alle de didaktikere, der har skrevet spændende artikler om emnet, som jeg ikke nævner.

Jeg er af den faste overbevisning, at både elever og lærere kan have glæde af en gymnasiefagets teori som skitseret ovenfor. Måske kan teorien lige frem give undervisningen et løft.

Den rette linje som rød tråd

Af Jørgen Ebbesen

- En videnskabsteoretisk vinkel på den rette linje

1. m skulle som noget af det første – af hensyn til nv, hvor de udfører småforsøg, hvor resultatbehandlingen tit består i at tegne en (regressions)linje – se på lineære sammenhænge.

Efter det sædvanlige kaos med nye navne, udlevering af bøger og spørgsmål om lommeregnere holdt vi 5 minutters pause. Læreren kastede herefter spørgsmålet ud til forsamlingen:

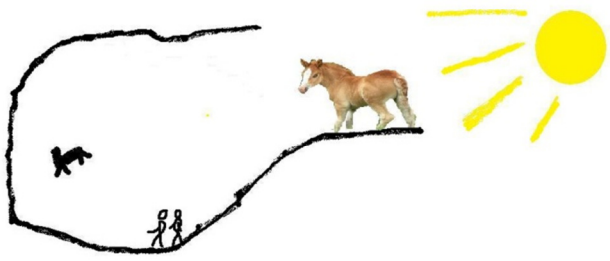
Hvad er en ret linje?

Det gik som forventet hjemmefra: der kom en streg på tavlen, som blev kasseret som ret linje, fordi den ikke er helt lige og fordi den ikke fortsatte uendeligt langt. På den anden side er der overhovedet noget i virkeligheden, der er uendeligt langt? Men hvis den rette linje ikke er ude i virkeligheden, hvor er den så? Inde i vores hoveder? Hvordan kan vi være sikre på, at der er det samme inde i vores hoveder? (det kan vi heller ikke). Vi kan snakke om tingene og se, om vi forstår hinanden. Men så let det er at misforstå, hvad hinanden siger i almindelighed, er det svært at forstå, hvorfor vi tilsyneladende forstår det samme eller i hvert fald kan tale om rette linjer.

Det var deres første matematiktime i gymnasiet, og spørgsmålet om den rette linje var en naturlig indledning til repetition af det, de har lært i grundskolen. Men læg mærke til, at de spørgsmål, der rejste sig den forbindelse alle har et videnskabsteoretisk potentiale

Forestillingen om den rette linje som en idealisering af virkelighedens tegnede linjer kunne føre os direkte ind i Platons ideverden. Den fysiske verden er ifølge Platon en discountudgave af ideernes verden. Den konkrete levende hest, som man kan se, lugte, høre og røre ved, vil, uanset hvor glad man er for dyret have nogle småfejl, så den ikke er den perfekte hest. Om ikke andet vil den ældes for til sidst at dø. I modsætning hertil findes idealhesten i ideernes verden. Den er fejlfri og uforanderlig.

Platons hulelignelse (googles let) kan inddrages, hvis man har lyst til at forfølge dette spor.



For Platon var der en enkel måde at komme i kontakt med ideernes verden på. Platon troede på reinkarnation, så sjælen havde været i ideverdenen i en tidligere tilværelse og skulle bare have hjulpet hukommelsen lidt på gled.

I Platons dialog ***Menon*** (dansk oversættelse tilgængelig på nettet) hjælper Sokrates Menons slave med at få genopfrisket hukommelsen, så man kan se, hvordan metoden fungerer i praksis. Man kunne bede eleverne om at læse teksten og formulere den matematiske argumentation i den på moderne dansk. De kunne også se på Sokrates' lærerrolle (han lægger ordene i munden på slaven).

Men fra et nutidigt synspunkt er sjælevandring ikke nogen acceptabel videnskabsteoretisk forklaring. Vi står med nærmest uoverstigeligt vanskelige problemer som matematikere: der findes ingen rette linjer i den fysiske verden. Men hvor er de rette linjer så henne? Og hvordan kan vi vide noget om dem? Det kræver, at vi på en eller anden måde kan komme i kontakt med dem. Det gør man som regel ved hjælp af sine sanser, men rette linjer kan ikke mærkes, ses, høres eller smages.

En pudsig detalje var, at den elev, der skulle tegne en linje startede med at tegne et koordinatsystem, selv om han faktisk kun var blevet bedt om at tegne en linje. Koordinatsystemet er en relativ ny opfindelse, som normalt tilskrives René Descartes (1596-1650). I sin ***La Géométrie*** fra 1637 beskrev han blandt andet linjer og cirkler vha. ligninger og forenede dermed de to matematiske discipliner geometri og aritmetik efter cirka 2000 års adskillelse. Pierre de *Fermat* (1601-1665) havde faktisk beskrevet det, vi i dag kalder analytisk geometri, året før, men hans markedsføring var dårligere end Descartes', så Descartes er løbet med æren. Også for koordinatsystemet, selv om han ikke tegnede noget i sin geometri, som ellers indeholder mange figurer.

Så identifikationen af linjen med dens ligning er langt fra en selvfølge. Ikke desto mindre kom den på banen meget tidligt i diskussionen i 1.m. Man kunne bede eleverne om at skrive et projekt om emnet. Det overlades til læseren at formulere projektopgaven, men spørgsmålene: "Hvor kommer linjens ligning fra? Og hvorfor blev den indført så sent, når matematikere har arbejdet systematisk med geometri siden Euklid?" ligger lige til højrebenet.

Og den rette linjes videnskabsteoretiske potentiale er langt fra udtømt med ovenstående forslag. Pointen er, at vi som matematiklærere ikke behøver at vride vore hjerner for at finde på særlige forløb med hovedvægten på videnskabsteorien. Konsekvensen af den strategi risikerer meget let at blive, at videnskabsteorien bliver noget, vi tager frem ved festlige lejligheder, og ellers gør vi som plejer. Hvorfor ikke plukke de lavthængende frugter i stedet? Med den sidegevinst at det videnskabsteoretiske perspektiv på matematikken bliver integreret i faget snarere end isoleret?

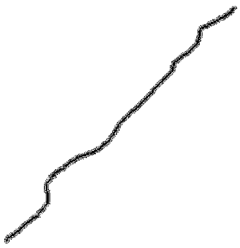
I 1.m var der tale om en klasserumsdiskussion. Som en service til de læsere, der foretrækker andre undervisningsformer, er indholdet af diskussionen formuleret som en opgave nedenfor.

Spørgsmålene e) - i) er formuleret med henblik på at diskutere Euklid. Endnu et eksempel på en lavthængende videnskabsteoretisk frugt, som vi møder i den daglige undervisning.

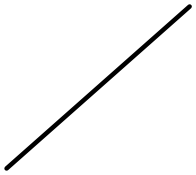
Opgave

Svar for hvert af delspørgsmålene nedenfor på spørgsmålene: er dette en ret linje? Hvad er der galt, hvis det ikke er det?

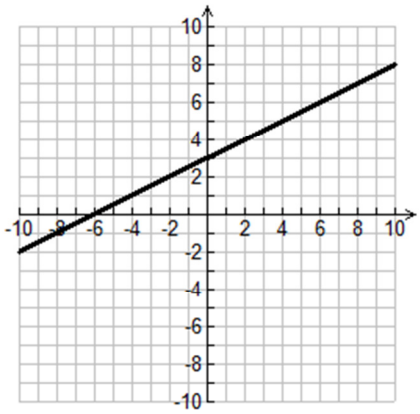
a)



b)



c)



d) $y = x - 2$

Vælg selv to punkter A og B i planen. Og svar på, om der beskrives rette linjer nedenfor. Illustrér din besvarelse med en figur!

e) Linjestykket AB

f) Linjen gennem A og B

g) Midtnormalen til linjestykket AB

h) Alle de punkter, der har samme afstand til punkterne A og B

Vælg et punkt C og en linje l i planen. Og svar på, om beskrivelsen nedenfor giver mening.

i) Linjen gennem punktet C parallel med linjen l.

Kan man tegne en ret linje? Begrund svaret!

Læg mærke til, at spørgsmål i) lægger op til en diskussion af parallelaksiomet Skulle man have lyst til at fortsætte ad det spor, peger det frem mod den ikke-euklidiske geometri.

Med fremkomsten af alternative geometrier ændrer aksiomsystemet karakter fra at være deskriptivt (det beskriver den ”naturlige” geometri) til at være.. Øh, til at være hvad? Vi havner lige lukt i grundlagskrisen og dens forskellige bud på, hvad matematik er. Fx formalismens synspunkt formuleret af Hilbert, at punkter, linjer og planer lige så godt kunne være stole, borde og ølkrus! Og logicismens synspunkt, at matematiske teoremer er logiske tautologier. Begge positioner har den fordel, at de unddrager sig det prekære spørgsmål, hvad matematik handler om. Formalismens svar er: ”ingenting” og logicismens svar er: ”matematik er logik”. Eleverne kan finde en masse materiale på om de forskellige grundlagsskoler på nettet. Oven i købet på dansk. Og fra rimeligt troværdige og udførlige kilder.

Eleverne kunne også se på den for tiden forkætrede matematiske platonisme (matematikkens objekter er abstraktioner, de eksisterer i en eller anden forstand, og matematiske sætninger handler om disse objekters egenskaber). Det er godt nok en position, som har filosofiske forklaringsproblemer, men som til gengæld giver en god beskrivelse af, hvordan matematik opleves.

Vi er nu i den mere højpandede ende af videnskabsteorien, som man nok kun skal begive sig ud i med særligt interesserede elever. Den slags elever, som har lyst til erkendelsesmæssige udfordringer, har vi jo trods alt også. Hvis man vil give disse elever lov til at prøve kræfter med de tunge spørgsmål, kan man orkestrere et videnskabsteoretisk projektarbejde, hvor eleverne selv vælger ambitionsniveauet. Som tidligere anført, kan man sagtens finde jordnære emner, så mindre ambitiøse elever kan finde meningsfuld og måske endda AT-relevant beskæftigelse.

Matematikfagets metoder i AT-perspektiv

Af Jørgen Ebbesen

Nedenstående artikel blev skrevet med den gamle læreplan for AT som ledetråd. Vi har i mellemtiden fået nye læreplaner i hele gymnasiets fagrække august 2010. Indledningen er derfor delvis forældet, men artiklens hovedpointe – at det er de konkrete matematiske metoder, som anvendes på sagen, som er centrale ved AT-eksamen – stadig aktuel. Faktisk er den nærmest blevet kanoniseret med bekendtgørelsesændringerne.

Jeg har valgt at beholde den oprindelige indledning og tilføjet de nye formuleringer i parentes. Dels gælder den gamle læreplan endnu for et par årgange. Dels er det interessant at følge udviklingen i AT i retning af det mere meningsfyldte.

Ifølge læreplanen for AT skal synopsen, som er udgangspunkt for den mundtlige eksamen, ”***indeholde en diskussion af, hvilke materialer, teorier og metoder der er relevante i arbejdet med problemstillingerne*** (hvilke materialer, metoder og der er relevante i arbejdet med underspørgsmålene)”.

Ved karakterfastsættelsen vurderes i hvilket omfang, eleven indfrier de faglige mål. Et af disse er at ”***anvende indsigt i elementær videnskabsteori og videnskabelige ræsonnementer til at formulere og reflektere over problemstillinger af enkeltfaglig, flerfaglig og fællesfaglig karakter*** (demonstrere indsigt i videnskabelig tankegang og gøre sig elementære videnskabsteoretiske overvejelser i forhold til den konkrete sag) ”.

Det er unægtelig lidt af en mundfuld. Man kan blive helt urolig på elevernes vegne. Og som lærer godt komme i tvivl om, hvor vidt man har klædt dem ordentligt på til at indfri kravene.

Så er det, at man skal slå koldt vand i blodet og læne sig op ad AT-fagkonsulenternes fortolkning af, hvad der skal forstås ved elementær videnskabsteori, nemlig fagenes teori og metoder.

Med denne tolkning flyttes fokus nemlig fra den videnskabsteori, vi har en tilbøjelighed til at stirre os blinde på, til fagenes metoder. Og de er langt lettere at forholde sig til. I matematik er vi endda så heldige, at vi kan give dem en tjekliste.

Har de gjort noget af det, der står under matematiks faglige mål i læreplanen, jamen så har de brugt matematikfaglige metoder.

2.1 Faglige mål

Eleverne skal kunne:

- håndtere formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, og selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold

- anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, (gennemføre hypotesetest), kunne stille

spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog

- anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger

- anvende forskellige fortolkninger af stamfunktion og forskellige metoder til løsning af differentialligninger

- opstille geometriske modeller og løse geometriske problemer på grundlag af trekantsberegninger (på grundlag af trekantsberegninger udgår i den nye læreplan) samt kunne give en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer og udnytte dette til at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål

- redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori

- demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling

- demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling

- (demonstrere viden om fagets identitet og metoder)

- anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer.

Jamen øh, kan man virkelig affærdige teori og metode-aspektet af AT ved at give eleverne ovenstående tjekliste?

Det mener jeg helt seriøst, at man kan. Og at det er en god ide. For det lægger op til, at eleverne beskriver, de metoder, de rent faktisk anvender. Og ikke ævler løs om den aksiomatisk-deduktive metode, som, hvor vigtig den end er, sjældent er direkte relevant i forhold til den sag, eleven vil undersøge. Ikke alle punkter i tjeklisten er lige relevante, så man skal selvfølgelig skære den til. Læg mærke til, hvor indholdstungt det første punkt i virkeligheden er. Det er vi tilbøjelige til at glemme. Jeg giver mit bud på tjekliste nedenfor.

Det er mit indtryk efter at have set på andre fags læreplaner, at vi er privilegerede som matematiklærere, når vi får stillet en fiks og færdig metodefortegnelse til rådighed. Lad os dog benytte os af det i stedet for at spilde tiden med at genopfinde den dybe tallerken.

Den opmærksomme læser vil have bemærket, at jeg fokuserer på metoder frem for teorier. Det skyldes, at jeg simpelthen ikke forstår, hvad ordet betyder i matematikfaglig sammenhæng. Teorier om og for hvad? Det giver væsentlig bedre mening i fx samfundsfag, hvor eleverne kan belyse

sagen ud fra forskellige politiske eller økonomiske teorier. Men i matematik? Nej, jeg forstår det ikke.

Ovenstående er skrevet med henblik på AT-eksamen. Det siger sig selv, at man i andre sammenhænge kan (og bør) opmuntre eleverne til at reflektere over, hvad matematik egentlig er, men det er en anden snak.

Forslag til tjekliste over matematiske metoder

Du bruger matematiske metoder, når du

- håndterer formler
- oversætter almindeligt sprog til symbolsprog – og den modsatte vej
- beskriver variabelsammenhænge
- anvender it til at løse matematiske problemer
- opstiller matematiske modeller, stiller spørgsmål ud fra modellerne, har blik for hvilke svar, der kan forventes, og er i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog
- analyserer givne matematiske modeller og foretager fremskrivninger
- forholder dig til idealiseringer og rækkevidde af modellerne
- foretager simuleringer
- gennemfører hypotesetest
- anvender simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder
- anvender funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder
- løser differentialligninger
- anvender forskellige fortolkninger af stamfunktion
- opstiller geometriske modeller
- løser geometriske problemer
- giver en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer og udnytter dette til at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål

- redegør for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori.

At Smørrebrød er ikke Mad

Af Jørgen Ebbesen

År 2010 bød på (mindst) to gode nyheder på AT-fronten. Først blev læreplanen justeret, så de faglige mål blev ændret fra det luftige og vidtløftige til det konkret anvendbare. Og kravet om tværfaglighed på tværs af hoveområderne blev forladt som fagligt mål og henvist til der, hvor det rettelig hører hjemme, under organisationsformerne for det samlede AT-forløb.

Dernæst meldte AT-fagkonsulenterne fagrammerne for sommereksamen i AT 2011 ud:

Du skal vælge to fag, hvoraf det ene er på mindst B-niveau, og anvende disse i besvarelsen af opgaven.

I skrivende stund kendes emnet for årets AT-eksamen endnu ikke, men der er grund til at glæde sig over, at der ikke forlods er noget til hinder for, at eleverne kan vælge en sag, som de undersøger under inddragelse af matematik i kombination med et naturvidenskabeligt fag. Det er immervæk den mest oplagte tværfaglige samarbejdsmulighed for matematik.

Men der følger et paradoksproblem i kølvandet på de glædelige nyheder. (AT-)fagkonsulent Bjørn Grøn har gentagne gange understreget vigtigheden af, at eleverne kan redegøre for valget af fag, og hvorfor ingen af fagene kan undværes.

Problemet opstår, fordi de naturvidenskabelige fag beskæftiger sig med sager, hvor det er nødvendigt at inddrage matematiske metoder, så ofte, at disse metoder er blevet en integreret del af de naturvidenskabelige fag. Der opstår derfor et grænsedragningsproblem: hvor stopper matematikken, og hvor begynder naturvidenskaben? Et tilsvarende problem opstår ved anvendelse af kvantitative metoder i samfundsfag.

Man kan selvfølgelig gøre kort proces og fastslå, at matematikkens genstandsområde adskiller sig fra de naturvidenskabelige fags. Artiklens forfatter er tilhænger af dette synspunkt, men er opmærksom på, at det kan problematiseres. Forfatterens humanistiske og samfundsvidenskabelige kolleger fraråder, at eleverne vælger fag inden for samme fakultet, af frygt for at eleverne får problemer med at begrunde nødvendigheden af *begge* fag til belysning af sagen.

De fleste kender formodentlig den naturvidenskabelige programerklæring: *Mål alt, hvad måles kan, og gør det måleligt, som endnu ikke kan måles*. Ordene tilskrives sædvanligvis Galilei, men de findes intetsteds i hans samlede værker, så der er tale om en videnskabshistorisk skrøne[24]. Men ordene beskriver glimrende skiftet fra naturfilosofi til naturvidenskab baseret på kontrollerede eksperimenter i løbet af renæssancen. Et skift, hvor meningen bag fænomenerne ofte afløses af en matematisk beskrivelse af dem. Og som Galilei var foregangsmand for, hvilket kan forklare mytens robusthed.

[24] Kleinert, A. (2009), *Der messende Luchs. Zwei verbreitete Fehler in der Galilei-Literatur*, NTM Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften, Technik und Medizin, Vol. 17, No. 2, pp. 199-206

Der har vi så problemet, for med denne forståelse af, hvad naturvidenskab er, er matematik pr. definition en fast bestanddel af naturvidenskaben. Men vi har samtidig løsningen i AT-sammenhæng: benyttes matematikken for eksempel til beskrivelse af biologiske fænomener, er biologi uundværligt som fag, da det, der beskrives, *ikke* er en del af matematikken. Og for at sætte tal på fænomenerne skal disse gøres til genstand for måling. Hvad, det er vigtigt at måle, og målemetoderne er en del af biologien. Omvendt overlader de fleste biologer gerne den matematiske behandling af måleresultaterne til matematikerne. De har det med matematikken, som forfatteren har det med sin bil: når bare den kan køre, er han ligeglad med, hvad der er under motorhjelmen, og hvordan det virker.

Matematikeren er lige så uundværlig for biologen, som mekanikeren er for forfatteren. Måske skal vi som matematikere være villige til at sluge et par kameler og ikke løfte den faglige fane alt for højt? Mange af os har det godt nok dårligt over at se vores fag reduceret til et værktøjsfag. Men i AT-sammenhæng er reduktionen ikke unaturlig, og vi burde måske snarere være stolte over at besidde så stærke og alsidige værktøj? Den samme matematiske model, fx eksponentiel vækst kan bruges på vidt forskellige (natur)fænomener.

Man kan indvende, at der ikke er ret meget matematik i behandlingen af måleresultater, men det kræver som regel indførelse af variable og undersøgelse af variabelsammenhænge, og vi kommer hurtigt gennem flere punkter på tjeklisten i artiklen *Matematikfagets metoder i AT-perspektiv*.

Det var ikke nogen tilfældighed, at vi ovenfor så på fagkombinationen matematik-biologi. For selv om biologerne bruger matematik, er det nok at tage munden for fuld, hvis man hævder, at matematikken er en del af biologien. Den er snarere et værktøj, som biologerne bruger.

Hvis vi ser på vores traditionelle samarbejdspartner fysikken, er billedet unægtelig mere speget. Historisk set har fagene været nærmest uadskillelige. Titlen på et af højdepunkterne inden for fysik, Newtons *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* siger vel det hele. Og bemeldte herre udviklede infinitesimalregningen for at kunne beskrive bevægelse. Det er langt fra eneste eksempel på, at fysikere ikke kun nøjes med at benytte matematik. Hvis ikke den fornødne matematik er til rådighed, laver de den selv.

Set fra denne synsvinkel er det svært at begrunde nødvendigheden af begge fagene matematik og fysik til at belyse en sag. Den matematik, som sagens behandling kræver, kan tit opfattes som en del af fysikken. Men det ville være synd på forhånd at fraskrive eleven muligheden for at kombinere de to fag. En løsning kunne være, at vi i AT-sammenhæng lægger vægt på den eksperimentelle side af fysikfaget og accepterer, at den matematiske fysik (som er voldsomt nedprioriteret i gymnasiefaget fysik) repræsenteres af matematik.

Om det er sådan, kagen skal skæres, er et valg, der skal være konsensus om. Forfatteren af denne artikel ser gerne, at AT-fagkonsulenterne skærer igennem for at sikre, at eleverne får ensartet vejledning.

Til sidst skal det anføres, at grænsedragningsproblemet kan vendes til en fordel for eleverne, fordi det giver anledning til en diskussion af ikke bare matematikkens genstandsfelt, men også det overordnede spørgsmål om, hvad matematik er. Herunder spørgsmålet om, hvordan det kan være, at matematik er så effektivt til at beskrive naturen[25]. Spørgsmålet er flygtigt berørt i artiklen *Rotter og indianere. Og Kloge Hans.* Men man gå meget mere i dybden[26].

[25] Eugene Wigner: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, no. I (February 1960). Kan downloades fra http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/tp3/QM/wigner.pdf

[26] Den interesserede læser henvises til Terese Nielsen: *Hvorfor kan matematik anvendes?* Ppt-show, 26. maj 2010. Der er tale om en oversigt, hvor man selv må sætte sig ind i detaljerne, men diasshowet giver et glimrende overblik over problemfeltet.

En kort bemærkning om stokastikken

Af Jørgen Ebbesen

Ind til for nylig talte vi om statistik og sandsynlighedsregning. (Mode)ordet ***stokastik*** er en samlebetegnelse for de to discipliner. Stokastikken vil nedenfor blive udsat for en aldeles stedmoderlig behandling sammenlignet med den betydning, den har i tværfaglig sammenhæng i gymnasiet.

Der er sket en markant forskydning i vægtningen af de to discipliner med den seneste gymnasiereform. Før var hovedvægten på endelige sandsynlighedsfelter, gerne symmetriske og kombinatorik. Efter de seneste ændringer i læreplanen er kernestoffet i stokastikken:

simple statistiske metoder til håndtering af et datamateriale, grafisk præsentation af et statistisk materiale, empiriske statistiske deskriptorer, stikprøvers repræsentativitet og chi-i-anden test.

Og det supplerende stof skal omfatte sammenhængende et forløb *med anvendelse af yderligere mindst én type statistisk eller sandsynlighedsteoretisk model.*

Læg mærke til, at der ikke er noget krav om indførelse af statistikken på et sandsynlighedsteoretisk grundlag. Det kan man alt efter temperament begræde eller glæde sig over. Personligt var jeg glad for teorien om endelige sandsynlighedsfelter, som jeg opfatter som det eneste eksempel på anvendelse af den aksiomatisk-deduktive metode inden for gymnasiestoffet. Vi bygger flagskibet differential- og integralregning på uklare, udefinerede begreber, og det samme gælder den plane geometri. Mine elever beviser troligt hældningsformlen for en ret linje, men vi definerer aldrig en ret linje (og godt det samme, for så giver det ikke mening at udlede hældningsformlen).

Men arbejdet med de endelige sandsynlighedsfelter var tidskrævende og havde en tilbøjelighed til at lukke sig om sig selv. Vi kunne måske nok på solidt fagligt grundlag nå frem til fordelingsfunktionen for en binomial fordelt stokastisk variabel. Og bruge resultatet til at beregne sandsynligheden for, at et dige ville blive oversvømmet mindst én gang over en 20-årig periode. Og en masse andre spændende sandsynligheder. Vi nåede imidlertid aldrig frem til den statistik, som vel egentlig var grunden til, at vi indførte sandsynlighedsteorien.

Situationen er lidt den omvendte i dag (med mindre man vælger at indfør en sandsynlighedsteoretisk model). Nu er vi sikre på, at eleverne i hvert fald kommer til at arbejde med en statistisk test, men det teoretiske grundlag er plantet solidt i den blå luft. Det gør det for mig at se nærmest umuligt at sige noget fornuftigt videnskabsteoretisk om stokastikken på gymnasieniveau, al den stund at videnskaben er hældt ud med badevandet.

Skulle man være så heldig, at eleverne har kemi og/eller fysik på tilstrækkeligt højt niveau, kunne man sammenholde mekanikkens deterministiske verdensbillede med kvantemekanikkens verdensbilledeog måske komme ind på Bohr/Einstein-diskussionen om tolkningen af kvantemekanikken. Og i sidste ende den overordnede realismediskussion (beskriver vi verden, som

den er, eller modellerer vi den bare efter bedste evne). Men det kræver nok et særligt engagement fra såvel lærer(e) som elever.

Der er til gengæld en masse at sige om de statistiske metoder og deres begrænsninger. Fx finder vi belæg for en påstand ved at antage, at den ikke er opfyldt, og kassere denne alternative påstand, fordi den er for usandsynlig. Det er da bemærkelsesværdigt. Og at de påstande, vi efterviser på denne måde, altid er eftervist med en vis fejlrisiko, afviger fra, hvad vi er vant til fra resten af matematikken.

Når vi udtaler os på baggrund af en stikprøve, er det en forudsætning, at den er repræsentativ for den population, vi ønsker at udtale os om. Det er et metodisk forbehold, der vil noget, al den stund, at det nærmest er umuligt at udtage en sådan stikprøve.

Man kan læse nærmere om andre metodiske spørgsmål, som det ville være naturligt at eleverne stillede sig i forbindelse med statiske undersøgelser i den form, de bliver præsenteret for dem, i skrivelsen ***Om variabelbegrebet, om at prøve sig frem og om stikprøveopgaver*** [i] fra fagkonsulent Bjørn Grøn, Undervisningsministeriet.

Jeg vil afslutningsvis pege på et par spørgsmål, som det vil være naturligt at tage op, hvis man anlægger en mere eksperimentel tilgang til stokastikken, nemlig i hvilken forstand, man kan sætte lighedstegn mellem frekvenser (ved mange gentagelser) og sandsynligheder. Og hvilken status simuleringer indbygget i de anvendte CAS-programmer skal tillægges.

Jeg vil personlig foretrække de klassiske modeller for kast med symmetriske mønter og terninger baseret på symmetriske sandsynlighedsfelter frem for modeller baseret på frekvenser ved gentagne kast. Skulle frekvenserne afvige fra $\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{6}$, vil jeg være tilbøjelig til at kassere mønten og terningen/tilskrive resultaterne statistiske udsving. Jeg kunne ikke drømme om at skifte de klassiske modeller ud. De er jo ikke kun praktiske ad hoc modeller, men idealiseringer.

Og simuleringerne er bekvemme, men ikke helt uproblematiske. Tilfældige tal spiller en central rolle i stokastikken; men i hvilken forstand er de CAS-genererede tal tilfældige? Det er de selvfølgelig ikke, for der er med garanti en eller anden algoritme indbygget i softwaren, men i nogen sammenhænge er det godt nok. Det var det bare ikke dengang, jeg brugte min lommeregners tilfældige tal til at afgøre, hvem af eleverne der skulle til tavlen: eleverne valgte et tal hver, og så trykkede jeg på tilfældigt tal, indtil eleverne sagde stop. Jeg måtte opgive metoden, fordi eleverne opdagede, at lommeregneren gav de samme tal i samme rækkefølge hver gang.

---

[1] Kan downloades fra
http://www.emu.dk/gym/fag/ma/undervisningsministeriet/nyt/variabelbegrebet-stikproever.pdf

Samlet litteraturliste:

Matematikkens filosofi og videnskabsteori generelt:

Mark Balaguer: *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford University Press, 1998.Forfatterens præsentation af realisme og anti-realisme i matematikkens filosofi samt argumentation for, at spørgsmålet om realisme eller ej aldrig vil kunne besvares.
For lærere

Benacerraf , Paul m.fl.: *Philosophy of Mathematics*. Cambridge University Press, 2.udg., 1983
Klassisk artikelsamling med artikler fra perioden 1930-1965. Samlet i 4 emner: Grundlagskrisen, Tals eksistens, Matematisk sandhed og Mængdebegrebet.
Artikelsamlingen indeholder flere klassiske artikler, som ligger til grund for diskussionen af matematikkens filosofi i dag, men de er teknisk svære.
For lærere

Brown, James Robert: *Philosophy of Mathematics - an introduction to the world of proofs and pictures.* Routledge, 1999.
En gennemgang af mange historiske episoder og filosofiske debatter, centreret omkring den rolle billeder kan spille eller spiller i beviser og om selve bevisbegrebet.
Velskrevet og spændende. Mere egnet til at vække matematik-filosofisk nysgerrighed end til at præsentere matematik-filosofiske positioner eller spørgsmål
For lærere og engelskkyndige elever

Bertelsen, Aksel: *Når matematikken slår rødder*, Systime 2009
Bogen har matematikken i Platons idélære som udgangspunkt. Den er tænkt som et supplement eller ligefrem modvægt til den mere og mere anvendelsesorienterede gymnasieundervisning. Flere videnskabsteoretiske spørgsmål tages op undervejs.

Colyvan, Mark: *The Indispensability of Mathematics*. Oxford University Press, 2001.
Gennemgang af diskussionen om matematikkens anvendelighed, med udgangspunkt i Fields fiktionalisme og Maddys matematiske naturalisme.
For lærere

Davis, Philip J. & Reuben Hersh: *The Mathematical Experience*. Penguin Books, 1981.
Et udvalg af forskellige observationer om matematik, set fra den arbejdende matematikers synsvinkel.
Velskrevet og spændende. God at plukke matematik-eksempler fra.
Lærere og elever (mindst 2g)

Friend, Michèle: *Introducing Philosophy of Mathematics*. 2007, Acumen Publishing Limited
(Meget) amerikansk indføring i matematikkens filosofi, bl.a. med et kapitel om uendelighed.

Gray, Jeremy J.: *The Hilbert Challenge*. Oxford University Press, 2000.
Udgivet i anledning af 100 års dagen for Hilberts 22 problemer. Historisk gennemgang af baggrund og status.
Lærere og gode elever. Nogle trykfejl og ujævnt sværhedsniveau.

Kitcher, Philip: *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford University Press 1984.
Kitchers forsøg på at bruge Kuhns beskrivelse af videnskaben som normalvidenskab afbrudt af revolutioner på differentialregningens historie.
Lærere

Lakatos, Imre: *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press, 1976
Lakatos's historie om Eulers polyedersætning, fortalt som en dialog mellem en underviser og en klasse, med henblik på at illustrere mekanismer i matematikkens historiske udvikling.
Lærere og elever.

Niss, Mogens (red.): Matematikken og verden. Fremad 2001.
kap. 3 af H.C. Hansen om de to retninger indenfor matematikkens filosofi

Pedersen, Stig A.:*Matematikkens filosofi.* I "Et spadestik dybere", Vincent F. Hendricks og Steen W. Pedersen (red.), 2008, Automatic Press

Resnik, Michael D: *Mathematics as a Science of Patterns*. Clarendon Press, 1997.
Strukturalismens programskrift, og samtidig en gennemgang af realismedebatten.
Lærere og elever.

Shapiro, Stewart: *Thinking about mathematics - the philosophy of mathematics*. Oxford University Press, 2000.
Grundig gennemgang af positioner og spørgsmål inden for matematikkens filosofi, præsenteret i et historisk perspektiv. Herunder gennemgang af Grundlagskrisen.
Lærere. Begyndere inden for matematikkens filosofi på universitetsniveau.

Tymoczko, Thomas: *New directions in the philosophy of mathematics*
Artikelsamling om matematikkens filosofi, med fokus på matematisk praksis snarere end grundlagsspørgsmål. Tymoczkos egen artikel om computere i matematik og firfarveproblemet har vakt en del debat. For lærere.

www.Ice-J.dk
Mange emner fra matematikkens videnskabsteori er behandlet på denne hjemmeside, der desværre ikke længere opdateres. Målgruppen er lærere og filosofisk interesserede elever.

Matematikkens historie:

Johansen, Karsten Friis: *Den europæiske filosofis historie – Antikken*. 1994, Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck,
1.del, kap. 5 om Eleaterne (bl.a. Zenon), 4. del om Aristoteles

Kline, Morris: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, 1972.
Kronologisk gennemgang af matematikkens historie fra Babylonerne til nu.
Lærere og elever

Mejlbo, Lars: *Matematikkens aspekter – om det uendelige*. 1991, Matematiklærerforeningen

Singh, Simon: *Fermats store sætning*. København 2000.
Historien om Fermats sidste sætning.
Alle interesserede

Singh, Simon*: Kodebogen*. København 2001.
Kryptologi fra romertiden til i dag.
Alle interesserede

Logik:

Heijenoort, Jean van: *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic*, 1879-1931. toExcel, Genoptryk 2000.
Klassiske artikler af Frege, Peano, Dedekind, Cantor, Russell, Hilbert, Zermelo, Brouwer, Weyl, Gödel osv osv.
Lærere, forudsætter kendskab til logik.

Smullyan, Raymond: *The Lady or the Tiger? And other logical puzzles*. 1982
Logiske gåder.
Alle

Matematisk bevis:

Brandt, Jørgen og Knud Nissen: *QED. En introduktion til matematisk bevis*. Abacus 1997.
De fire første kapitler omhandler matematiske bevismetoder. Her gives også en introduktion til logik og aksiomsystemer.
Bogens to sidste kapitler fokuserer på matematikkens grundlag, herunder en formalisering af den aksiomatisk-deduktive metode kulminerende i Gödels berømte sætninger, der dog her bevises i skitseform.
Elever, 3g, A-niveau

Matematisk modellering:

Blomhøj, Morten, Thomas Højgaard Jensen, Tine Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen: *Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse – udvikling af et kursus*, IMFUFA tekst 402 2001, side 12.
Den interesserede læser henvises til den udførlige beskrives side 11-18 i rapporten. Ud over den mere detaljerede beskrivelse af modelleringsprocessen tydeliggør modellen det store arbejde, der ligger før matematikken

Wigner, Eugene: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communications in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, no. I (February 1960). Kan downloades fra
http://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/tp3/QM/wigner.pdf

Skriftlig matematik:

Gillman, Leonard: *Writing Mathematics Well*, Mathematical Association of America, 1987
Virkelig god lille bog om udformningen af større skriftlige arbejder i matematik. Omhandler blandt andet god disposition, bevisførelse og notation i en matematisk tekst.

Kristensen, Erik og Ole Rindung: *Matematik* 1, 10. udgave, C.E.C Gads forlag, 1981.
1 indeholder en fin vejledning til mængder, udsagn og udsagnslogik. Herunder brugen af tegn og symboler.

Lee, Kevin P, Dr*: A Guide to Writing Mathematics*.
Underholdende artikel på gymnasieniveau, som indeholder mange eksempler på god og dårlig stil i opgavebesvarelser
Findes her: . http://ems.calumet.purdue.edu/mcss/kevinlee/mathwriting/writingman.pdf

Steenrod, Norman E., Paul R. Halmos et al: *How to Write mathematics*, American Mathematical Society, 1975,
Her er det Paul Halmos artikel om udformningen af en matematisk tekst, der kan anbefales. Artiklen er inddelt i små afsnit med friske overskrifter såsom: 'Say Something', 'Speak to Someone', 'Resist Symbols' og 'Use Symbols Correctly'.

http://www.uvmat.dk/skrift/
Om den nye skriftlighed i matematikundervisningen. Indeholder gode råd til udformningen af skriftlige eksamensbesvarelser.

Indholdsfortegnelse

Forord *af Karen Thorsen og Jørgen Ebbesen* s. 1

Hvad er tal? *af Terese Nielsen* s. 5

Rotter og indianere *af Jørgen Ebbesen* s. 23

Matematik og myter *af Karen Thorsen* s. 33

Om brugen af matematiske tegn og objekter i en god matematisk fremstilling *af Petur Petersen* s. 46

Uendelighed *af Charlotte Stefansen* s. 56

Matematiske beviser *af Mads Keinicke* s. 61

Magrittes pibe og matematisk modellering *af Jørgen Ebbesen* s. 64

Kompetencer i matematik, ét redskab til at tale om videnskabelighed i matematik *af Jakob Holm* s. 70

Kompetencer i matematik, et eksempel *af Jakob Holm* s. 74

Elementær videnskabsteori aint no such thing *af Jørgen Ebbesen* s. 103

Den rette linje som den røde tråd *af Jørgen Ebbesen* s. 109

Matematikfagets metoder i AT-perspektiv *af Jørgen Ebbesen* s. 113

At smørrebrød er ikke mad *af Jørgen Ebbesen* s. 117

En kort bemærkning om stokastikken *af Jørgen Ebbesen* s. 120

Litteraturliste s. 122