Hvad er tal?

Af Terese M. O. Nielsen

Indledning

Formål med denne skrivelse er at give matematiklærerne nogle øvelser, der kan puttes ind i almindelig undervisning, eller måske et kortere selvstændigt forløb (2-3 lektioner), om den filosofiske vinkel på spørgsmålet i overskriften: "Hvad er tal?".

Baggrunden er, at fag ofte karakteriseres ved deres genstandsområde(r) og deres metode(r). Eftersom mange af de emner, vi beskæftiger os med i matematik, kan føres tilbage til tal og former, er det oplagt at indsnævre spørgsmålet om, hvad matematikken egentlig handler om, til spørgsmålet om, hvad tal er. Derudover ligger det i direkte forlængelse af det almindelige arbejde med at undervise elever i at regne med forskellige tal-typer (brøker, negative tal, decimalnotation, potenser osv). I læreplanen for A-niveau indgår eksplicit "rationale og irrationale tal" som et emne, der kan give anledning til at spørge, hvad et tal er (mere om dette senere).

Emner - 1g

Regning - tal og repræsentationer af tal

Kernestof. Citat fra læreplanen
(https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=120566#Bil37)

– regningsarternes hierarki, ligningsløsning med grafiske og simple analytiske metoder, procent- og rentesregning, absolut og relativ ændring
– formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt lineære sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable

Alle elever skal kunne benytte brøker, decimaltal, procentsatser og potenstal. De bliver også præsenteret for videnskabelig notation, f.eks. Jordens masse skrevet som $m=5{,}976\cdot 10^{27}$ g.

Dette kan give anledning til at tale om sprogfilosofi: navne og det, de er navne på; tegn og det, de betegner.

Formålet med øvelsen er

i) at eleverne bruger fagtermerne brøk, rationalt tal, procentsats, videnskabelig notation (i spørgsmål c)
ii) at eleverne diskuterer, at valg af repræsentation afhænger af kontekst og formål

Noget af det, der efter min mening er helt specielt for matematik er, at grænsen mellem tegn og det, de betegner, er langt mere flydende end i andre fag. Det er indlysende, at ordet "hest" og tingen hest ikke er det samme. Men det er knap så indlysende at tegnet "2" og tallet 2 ikke er det samme.

Øvelser om forskellige repræsentationer af det samme tal , se side 16.

Litteratur: Der findes utroligt meget sprogfilosofisk litteratur. Denne artikel danner udgangspunkt for meget af diskussionen, og så er den skrevet af en matematiker - som dog går ud fra, at man har læst Kant:

Gottlob Frege: "Om mening og betydning". I *Filosofiens, sprogets og matematikkens grundlag* (ved Peer F. Bundgaard og Lars Binderup). Forlaget Philosophia 2002.

Potenstal - definitioner og beviste sandheder

Eleverne skal lære potensregnereglerne. I den forbindelse støder man på forskellen på bevist sandhed og vedtaget definition, især i forbindelse med diskussion af, hvad a^0 betyder.

Oversigt over definition, sætning, aksiom

Her er en oversigt over definition, sætning og beviser. Bemærk, at det *ikke* er alment accepteret, at 1) noget skal kunne bevises for at være en sætning, og at 2) aksiomer er uafhængige af konventioner. Jeg bruger forklaringerne nedenfor alligevel, eftersom jeg ikke kender til nogen simpel, alment accepteret måde at redegøre for forskellene på inden for rammerne af, hvad der kan forstås af en gymnasieklasse.

Definition En definition er et udsagn, der er sandt alene i kraft af konvention.

Aksiom Et aksiom er et sandt udsagn, der ikke afhænger af konventionen og ikke kræver bevis.

Sætning En sætning er en (bevist eller beviselig) sandhed, der er sand i kraft af at den følger ved (logisk) udledning fra axiomer og definitioner.

Bemærkning

En vigtig forskel på definitioner og udsagn er, at en definition aldrig kan være et eksistensudsagn. Derfor er "der findes et tal, som er efterfølger til tallet 1" et aksiom, mens "efterfølgeren til tallet 1 kaldes 2" er en definition - som kun faktisk definerer noget, for så vidt aksiomet er sandt. Det er ikke altid let at afgøre, om et udsagn er det ene eller det andet. Tænk for eksempel på reelle tal. Er "de reelle tal, R, er mængden af alle grænseværdier af Cauchyfølger fra Q" 1) en navngivning af noget i forvejen eksisterende, eller 2) en konstruktionsbeskrivelse, der skaber det, den beskriver?

Eksempel på problematikken i forbindelse med potensregneregler

I forbindelse med potensregneregler introducerer vi eleverne for følgende.

Definition

Når n er et helt, positivt tal, betegner a^n produktet af n kopier af a: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ gange}}$.

Ud fra denne definition beviser vi

Sætning om potensregneregler

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, når m og n er hele, positive tal.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, når m og n er hele, positive tal med m>n

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, når m og n er hele, positive tal.

Og så siger vi, at vi ønsker at disse to regler også skal gælde, når m og n *ikke* opfylder betingelserne i sætningen. Ud fra dette får vi bl.a. resultaterne $a^0=1$ og $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, som erfaringsmæssigt strider imod mange elevers intuition, og som i sidste ende er definitioner, vedtaget ud fra at ønske om at have så få regneregler som muligt.

Forskellen på definitioner og udsagn

Det sker med jævne mellemrum, at elever efterspørger en forklaring på, hvorfor en definitionsmæssig kendsgerning er, som den er. Det kan man i sagens natur ikke give dem. Men måske kan en diskussion af forskellen mellem definitioner og sætninger hjælpe dem til at forstå, hvorfor det ikke er rimeligt at spørge "hvorfor?" til en definition.

Her er en skematisk fremstilling af forskelle på begreberne og et link til nogle øvelser, der forhåbentlig kan give anledning til diskussion.

	Definition	**Axiom**	**Sætning**
Udsagn	er ikke et udsagn	er et sandt udsagn	er et sandt udsagn
Mulige sandhedsværdier	kan umuligt være falsk	kunne være falsk	kunne være falsk
Genstandsområde	handler om menneskers sprogbrug	handler om matematiske genstande og relationer	handler om matematiske genstande og relationer
Tidslig sandhedsværdi	er sand fra den bliver vedtaget	er altid sand	er altid sand
Bevisbarhed	kan ikke bevises	kan ikke bevises	kan bevises[1]
Tomme tegn eller meningsfulde tegn	handler om tegn, der ikke her en mening på forhånd	handler om begreber med en fast mening	handler om begreber med en fast mening

Øvelser om definitioner og udsagn, se side 18.

Litteratur

STANFORD ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY har et opslag om definitioner:

http://www.science.uva.nl/~seop/entries/definitions/

Den er forholdsvis teknisk. Den grundlæggende ide er, at en definition ikke bringer ny viden ind i en teori. Som sådan minder opdelingen i definitioner og (egentlige) udsagn om Kants skelnen mellem analytiske og syntetiske udsagn. Kant forudsætter dog, at alle betydninger af ord er fastlagt.

Immanuel Kant: *Kritik af den rene fornuft. Indledning*. "IV. Om forskellene mellem analytiske og syntetiske domme.". B10-B12. s. 67-69 i De store Tænkere, ved Justus Harnack. Munksgaard, København 1991

[1] Der findes sande, ubeviselige sætninger, jf. Gödels ufuldstændighedssætning. Omvendt kan enhver ikke-selvmodsigende påstand bevises i et formelt system, hvor påstanden selv er et axiom. Der er altså et åbent spørgsmål om, hvilket system en sætning skal kunne bevises inden for (og *om* den skal kunne bevises) for at være en sætning. Men det vil føre for vidt at gå i detaljer med det her.

Findes naturlige tal? Hvordan?

Hvis man stiller spørgsmålet "hvor mange?", mens man peger på en bunke legoklodser, vil de fleste antage, at man implicit mener "hvor mange *legoklodser*?" og besvare spørgsmålet derudfra. Legoklodser er tydeligt adskilte genstande, og man vil få det samme svar på sit spørgsmål, uanset hvordan legoklodserne er arrangeret. Man kan bygge et tårn af dem eller lægge dem i en rodet bunke, og svaret vil være det samme.

Hvis man stiller det samme spørgsmål, "hvor mange?" , mens man peger på en eller flere klumper modellervoks, er det ikke sikkert, at folk ved, hvad de skal svare. Og selv hvis de svarer f.eks. 2 eller 4, kan man tage præcis den samme mængde modellervoks og dele den op eller klumpe den sammen og måske få andre svar.

Denne øvelse bliver tit taget til indtægt for, at tal ikke er fysiske genstande. For *hvis* tallet 5 var en fysisk genstand, burde dets placering i rummet ikke ændre dets værdi. Man burde ikke kunne lave tallet 5 om til tallet 2 ved at flytte på (noget af) det.[2]

Man kan fortolke opfattelsen af tal som knyttet til fysiske genstande på to måder. Enten er tal faktiske egenskaber ved fysiske genstande, som genstandene har, uanset om mennesker lægger mærke til det eller ej (Stuart Mill). Eller tal er egenskaber ved menneskers opfattelse af verden (Kant). Vi organiserer vores sanseindtryk sådan, at tal opstår.

Der er forskellige versioner af begge synspunkter.

Hvis man siger, at tal er egenskaber ved fysiske genstande, kan man spørge, hvad en egenskab er? Nogen (Platon) vil svare, at det er en uafhængigt eksisterende abstraktion. Andre (Aristoteles) vil svare, at det er det faktum, at man ikke kan have stof der eksisterer, uden at det eksisterer på en eller anden måde - det vil enten være rundt eller firkantet, det kan ikke være formløst. Hvis man fortolker udsagnet platonisk, kan tallet 81299999789440984976849876953879074865974957659777777760000079834 godt findes, uafhængigt af om det er manifesteret i en faktisk eksisterende fysisk genstand. Hvis man fortolker 'egenskab' aristotelisk, findes så stort et tal ikke.[3]

Hvis man siger, at tal er egenskaber ved menneskers opfattelse af verden, kan dette igen forstås på to måder. I den ene version er tallene subjektive. Jeg vælger at opfatte legoklodserne som 2, og jeg kunne have valgt anderledes. Jeg konstruerer tallet to ud fra det mentale billede, som legoklodserne giver mig. I den anden version (Kant) er der tale om intersubjektive størrelser, i og med at tal-egenskaberne er givet på forhånd for alle mennesker og ikke kan vælges eller ændres.

En sidste version er at sige, at der ikke er nogen forbindelse mellem den fysiske verden og tallene overhovedet. Eller, hvis der er, er den klistret på senere, og set fra den rene matematiks synspunkt behøver man ikke bekymrer sig om den. Ifølge denne opfattelse er tal tegn, nærmere bestemt rækker af lodrette streger. Tallet 2 er en forkortelse af "|| ". Man kan, hvis man har lyst, danne en

---

[2] Jeg mener, jeg oprindeligt har læst eksemplet i Crispin Wright (1983): *Frege's Conception of Numbers as Objects.*
[3] Se også Charlotte Stephansens bidrag til nærværende artikelsamling.

forbindelse mellem "||" og nogle legoklodser, men det er uden for matematikkens og matematikerens område at dømme, om det er korrekt eller forkert at gøre.

Alle de skitserede opfattelser har filosofiske problemer. Man kan stille spørgsmål til alle synspunkterne, som de vil have vanskeligt ved at besvare.

Tal er fysiske genstande

Hvis tal er fysiske genstande, må man gå ud fra, at der kun er endeligt mange af dem, hvilket strider imod vores gængse matematik.

Tal er egenskaber ved fysiske genstande

Vi opfatter normalt ikke tals eksistens som tidsbegrænset eller relativ. Men hvis 5 er en egenskab ved legoklodserne, kan 5 ophører med at eksistere eller ændres. Man kan forestille sig, at jeg sendte en legoklods til Afrika, en til Kina, en til Peru, en til Grønland og beholdt en her. Ville legoklodserne så stadig have egenskaben 5? Eller hvad nu, hvis jeg føjer to legoklodser til min bunke. Har de så både egenskab 5 og egenskaben 7? Er 5 så det samme som 7?

Tal er mentale konstruktioner

Mentale konstruktioner må være personlige, knyttet til en bestemt bevidsthed, der har foretaget konstruktionen. Men tal er fælles eller objektive.

Tal er (fælles) træk ved menneskers bevidsthed

Hvis tal er fælles træk ved menneskers bevidsthed, findes de i og med der findes mennesker. Men så var der ikke tal for 50 millioner år siden. Det har konsekvenser for sandheden af f.eks. "2+2=4" som enten var et tomt udsagn (på linje med "lyserøde giraffer elsker is") eller falsk for 50 millioner år siden.

Tal er uafhængigt eksisterende abstrakte genstande

Hvis det er sandt, er tal evige, uden udstrækning, farve, smag og lugt. Men det gør det til et mysterium, hvordan vi kan vide noget om dem, siden vi ikke lader til at kunne få information om dem gennem vores normale kanaler, sanserne. Det betyder, at hvis vores udsagn om sand faktisk er sande, så kan dette kun være ved rene lykketræf, siden der ikke er noget der knytter tallene og vores viden om tallene sammen.[4]

Tal er tegn

Hvis tal er tegn, kan man spørge *hvilke* tegn de er? Er 2, 10, ii, β, 2.000, || det samme tegn? Er 4 større end 3? Hvilken farve har tallene? Og så videre. Disse spørgsmål virker absurde, men er meningsfulde ud fra et strengt formalistisk synspunkt.

[4] Dette er indholdet af Paul Benacerrafs artikel "Mathematical Truth" fra 1973. Genoptrykt i Putnam & Benacerraf (red): *Philosophy of Mathematics*, s. 403-420. Cambridge University Press, 1983.

I skemaet nedenfor har jeg sammenfattet talopfattelserne ovenfor og de problemer, de hver især har.

Talopfattelse	Tal er fysiske gen-stande	Tal er egenskaber ved fysiske genstande	Tal er mentale konstruktioner	Tal er træk ved menneskers bevidsthed	Tal er uafhængigt eksisterende abstrakte genstande	Tal er tegn
Problem	Hvor er de?	Har modellervoksen egenskaben 1 eller 10000?	Er dit 2-tal det samme som mit?	Det var vel sandt, at 2+2=4 før menneskets opståen? Hvordan kan det være, hvis der ikke var noget 2?	Hvordan kan vi vide noget om dem?	Men tal er ikke blå eller røde, og det er tegn.
Repræsentant for synspunktet		John Stuart Mill, (Tidlig) Penelope Maddy	Hartry Field	intuitio-nisme Inspireret af Kant, som dog mente, tal var træk ved *al mulig* fornuft og ikke kun knyttet til mennesker	Platon	David Hilbert
Realisme eller ej	anti-realisme	?	antirealisme	antirealisme	realisme	Anti-realisme

Normalt deler man matematikfilosofiske synspunkter op i realisme og anti-realisme med hensyn til eksistensspørgsmålet.

En *realist* mener, at matematikkens genstande eksisterer i sig selv, uafhængigt af hvad mennesker tænker og tror og uafhængigt af den fysiske verden. Af synspunkterne ovenfor er kun det platoniske strengt realistisk med hensyn til ontologi.[5]

En *antirealist* mener, at matematikkens genstande ikke eksisterer uafhængigt af menneskers bevidsthed og/eller den fysiske verden.

Øvelser om eksistensen af naturlige tal , se side 20.

Emner 2.g

I 2.g introduceres differentialregning, herunder grænseværdibegrebet. Dette begreb optræder også i forbindelse med talrepræsentationer

Tal-repræsentationer, grænseværdier og eksistens

Det er min erfaring, at mange elever har nogle uformulerede, forudfattede vaner, der går ud på, at 'rigtige' tal er decimaltal, og at lommeregneren har ret. Det gør det svært at regne med bogstaver og at acceptere f.eks. $\sqrt{13}$ som et resultat. Jeg har lavet nogle øvelser med det formål at få dem til at diskutere

- hvornår står to tegn for samme tal (med eksemplerne $\frac{1}{3}$ og $0,\bar{3}$, $0,\bar{9}$ og 1)

Det skulle gerne lede frem til denne

Definition af identitet mellem tal

To tal er ens, hvis deres differens kan gøres mindre end et vilkårligt, positivt tal.

Man kan bruge eleverne eksemplerne med $\bar{\ }$ -notationen til at forklare grænseværdibegrebet.

$0.\bar{3}$ betyder i virkeligheden grænseværdien af følgen 0.3, 0.33, 0.333, osv.

Med dette eksempel kan man definitionen af identitet måske hjælpe til at gøre begrebet grænseværdi mere spiselig, fordi den bygger på en ide om at enshed er forskellen-er-mindre-end-hvad som helst:

Definition af grænseværdi af en følge (tillempet gymnasiebrug, dvs uden 'for alle n>N')

En følge (x_n) har grænseværdien x, hvis forskellen mellem x og det n'te led i følgen kan gøres mindre end et vilkårligt, positivt tal, når bare n er stor nok,

I forbindelse med grænseværdibegrebet skal vi som regel berøre den mulighed, at det ikke er altid, grænseværdien eksisterer. Ikke alle symboler, der ligner navne på tal, er faktisk navne på tal. Derfor

[5] Der findes en tilsvarende opdeling i realisme og antirealisme med hensyn til sandhed. En epistemologisk realist mener, at matematiske udsagn er sande eller falske, hvad enten vi ved det (eller overhovedet kan vide det) eller ej. En antirealist mener, at matematisk sandhed må hænge sammen med erkendeevne på en eller anden måde; de to ting kan ikke være uafhængige af hinanden.

har jeg lavet nogle øvelser om 'endepunkter' i åbne intervaller, efter at have haft mange, mange diskussioner med elever om 'det mindste tal, der er større end 0'.

Endelig foreslår jeg, at man illustrerer de problemer der kan være med at repræsentere uendeligt mange tal ved at vise eleverne, at lommeregneren i hvert fald *ikke* kan.

Alle disse eksempler er filosofiske, fordi spørgsmål om, hvornår og hvordan tegn har betydning, er en filosofisk diskussion, ligesom spørgsmål om, hvornår og hvordan noget er det samme er. Eventuelt kan man tage spørgsmålet "Er tal tegn?" fra Afsnittet "Hvad er naturlige tal?" op.

Øvelser om uendelige tal-repræsentationer , se side 21.

Rationale og irrationale tal

Fra Cantor ved vi, at der er lige mange rationale og naturlige tal, men at der er flere reelle tal end rationale tal. Vi ved også, at der er tælleligt mange algebraiske tal (som f.eks. $\sqrt{2}$), men overtælleligt mange transcendente tal (som f.eks. π og e). Det er min påstand, at for mange elever er talopfattelsen knyttet til symbolerne for tal. Det gør det meget vanskeligt at forstå ideen om, at der er flere tal, end der er symboler. Det kan måske være interessant at vise eleverne, samtidig med at der er god lejlighed til at lave ræsonnementer og udpege netop matematiske beviser og den skarpe formulering af definitioner som et særkende ved matematik.

Mulige emner.

- Bevis for at $\sqrt{2}$ er irrational. Generalisér til $\sqrt{p}$ er irrational for ethvert primtal, p.

- Cantors diagonalargumenter. Giv mig en liste med alle navne på alle tal, og jeg kan nævne et tal, der ikke er med på listen. Så der er flere tal, end der er navne (med et højst tælleligt alfabet).

- π. Det er umuligt at skrive π ned som decimaltal. Hvordan gør man, når man gør det alligevel? F.eks π som grænseværdien af omkredsen af en n-kant med diameter 1, når n går mod uendelig. (π med 4 millioner decimaler findes på http://zenwerx.com/pi.php)

- Der er lige så mange rationale som naturlige tal, fordi 'lige så mange X som Y' betyder 'for hvert X er der ét og kun ét Y'. Sammenlign med 'der er lige så mange knive som tallerkener, fordi ud for hver tallerken ligger én og kun én kniv' (Freges eksempel).

- Hvorfor er der ikke huller i den reelle akse? Der er huller i den fysiske streg, vi tegner på tavlen.

- Findes irrationale tal? Hvor mange tal er der? Hvor mange tal kan jeres lommeregner regne med?

Øvelser med rationale og irrationale tal , se side 22.

Emner 3. g

Komplekse tal og vektorregning

I 3g kender eleverne talmængderne N, Z, Q og R og har vænnet sig til, at f.eks. $\sqrt{17}$ er et tal, lige så vel som 0,25. Det er muligt at stille talmængderne op som de resultater, man får, når man får flere og flere regneoperationer til sin rådighed:

N – alt, hvad man kan lave v.h.a. 1 og addition og multiplikation

Z – alt, hvad man kan lave v.h.a. N og subtraktion

Q – alt, hvad man kan lave v.h.a. Z og division

R – alt, hvad man kan lave v.h.a. Q og grænseovergang. Dette vil f.eks. være løsninger til regnestykket $x^2=2$, så man fremhæver ofte roduddragning som en ny regneoperation.

De reelle tal, R, er fuldstændiggørelsen af Q: det, der skal til for at lappe hullerne og danne en sammenhængende tallinje. Men når eleverne støder på vektorer, eller man eventuelt har et forløb eller en SRP om komplekse tal, kan man spørge til, hvorfor tal skal være på en linje?

Hvorfor er R 1-dimensionel?

Hvorfor er vektorer ikke tal?

C er to-dimensionel. Derudover findes der kvarternioner, som er et firdimensionelt tallegeme, og octinioner, som er et ottedimensionelt tallegeme.[6] Hvordan kan det være? Dette er i lige så høj grad et rent matematisk spørgsmål, som nok er for svært at gå i dybden med.

En diskussion af de komplekse tal kan også sætte fokus på spørgsmålet om kriterier for eksistens.

Hvad skal der til, for at noget findes? I matematik kræver vi normalt blot, at der kan gives en modsætningsfri definition, mens man i fysik ønsker sig en måling eller observation som bekræftelse på eksistensen af en postuleret entitet. Dette er i øvrigt den tanke, der ligger til grund for fiktionalisme: det synspunkt, at matematikkens genstande er af samme karakter som Snehvide, og at matematisk sandhed svarer til sandhedsbegrebet i fiktion.

Matematikkens karakteristika

Hvis eleverne i 3g vælger matematik til AT-eksamen, bør de være forberedt på at kunne

> – vurdere de forskellige fags og faglige metoders muligheder og begrænsninger i forhold til den konkrete sag
> – demonstrere indsigt i videnskabelig tankegang og gøre sig elementære videnskabsteoretiske overvejelser i forhold til den konkrete sag.

Fra AT- læreplanen https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=132647#B9

---

[6] Se http://en.wikipedia.org/wiki/Number .

Det vil sige, at de skal kunne karakterisere matematik og matematikkens muligheder for at belyse deres AT-sag.

I den forbindelse vil følgende spørgsmål naturligt dukke op:

1. Hvad er specielt ved matematik? Og hvorfor kan matematikken bruges i *denne* sammenhæng?
2. Hvordan er matematik forskellig fra fysik, dansk, billedkunst, tysk, naturgeografi osv osv?
3. Hvad har matematik til fælles med fysik, dansk, billedkunst, tysk, naturgeografi osv osv?
4. Hvad er matematik særligt godt til? Hvad er matematik særligt dårligt til?

Her er en liste over mulige svar, både fra filosoffer og elever. Læg mærke til, at de enkelte svar ikke nødvendigvis er indbyrdes konsistente. Listen er formentlig ikke udtømmende.

1) Matematikken
   a) har et specielt genstandsområde, som hverken er fysisk eller kulturelt (platonisme)
   b) er resultatet af menneskets historiske omgang med tal og former
   c) er faget, hvor man beviser sine resultater
   d) er en gren af logikken (logicisme)
   e) er abstraheret fra fysik (fysikalisme)
   f) kan anvendes på tværs af flere genstandsområder
   g) er mere generel end andre fag
   h) formidles i lærebøger bygget op v.h.a. *Definition*, *Sætning*, *Bevis*, *Eksempel*
2) Matematikken er forskellig fra andre fag, fordi
   a) andre fag ikke behandler f.eks. tal som et særskilt emneområde, men bare anvender dem
   b) den ikke er kultur-afhængig
   c) den er mere præcis
   d) den er mere velunderbygget
   e) der altid er et svar
   f) den altid er sand
3) Matematikken har det til fælles med andre fag, at
   a) den stræber efter sikker viden
   b) den er videnskabelig
   c) den er ikke subjektiv
4) Hvad er matematik særligt godt til? Hvad er matematik særligt dårligt til?
   a) Matematik kan beskrive alt, der kan tælles, måles eller beskrives geometrisk. Matematik kan ikke håndtere det, der ikke kan kvanticeres, stilles op i rækkefølge eller beskrives geometrisk.

Læg mærke til, at 1d) og 1e) er i modstrid med hinanden, og at 2e) er forkert, mens adskillige af de øvrige svar er vage.

Øvelser om forskellige repræsentationer af det samme tal

Øvelse 1

Her er et antal forskellige betegnelser.

$\frac{1}{4}$	0,25	$\frac{2}{8}$	25%
$2{,}5\cdot 10^{-1}$	en kvart	0,250	$1-\frac{3}{4}$

a) Hvilke(n) mængde(r) tilhører hvert enkelt tal?
b) Hvad har betegnelserne til fælles?
c) Hvad er forskellene på betegnelserne?
d) Angiv hvilken type betegnelser der er tale om.
e) Hvilken måde at skrive tallet på er bedst? I hvilke situationer?
f) Er der en af betegnelserne, der er den rigtige?

Øvelse 2

Her er beskrevet et antal situationer, hvor tallet fra øvelse 1 indgår. Hvilken af repræsentationerne vælger du?

a) Jeg vil gerne have et stykke af pizzaen.
b) Jeg skal angive moms på en vare.
c) Jeg skriver fysik-rapport og har målt en længde.
d) Jeg løser ligningen 4x=1 ved at dividere med 4 på begge sider af lighedstegnet.

Øvelse 3 om potensregneregler

Tallet $9^{½}$ er det samme som 3, fordi $(9^{½})^2 = 9$, og fordi $3^2 = 9$.

Når symbolet $9^{½}$ og 3 opfylder samme regneregler, må de stå for samme tal.

a) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $27^{\frac{1}{3}}$ er?'
b) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $8^{\frac{2}{3}}$ er?
c) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $256^{\frac{3}{4}}$ er?
d) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $256^{0,75}$ er?
e) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $56^{\frac{277859}{10000000}}$ er?
f) Hvordan finder man ud af, hvad tallet $7849^{2,3478935}$ er?

Tillægsspørgsmål (til emnet repræsentationer og det, de repræsenterer, på senere klassetrin)

- Er $\frac{1}{4}$ et tal eller et regnestykke? Hvornår er det hvad? Hvilke tal er regnestykker, og hvilke er tal?
- Hvis vi siger, at alle tegnene fra øvelse 1 er betegnelser for det samme tal, hvad er dette tal så?
- Er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ et tal eller et regnestykke? Er e? Er π? Er i?

Øvelser om definitioner og udsagn

Forklaring af begreber

En *definition* er et udsagn, der er sandt alene i kraft af konventionen.

Det er med andre ord en slags dåbshandling; en vedtagelse af, hvad et ord eller tegn skal betyde fremover.

Et *udsagn* er derimod sand eller falsk, uafhængigt af hvordan mennesker beslutter at bruge ord og tegn.

En definition handler om ords og tegns betydning. Et udsagn siger noget om det, som ordene og tegnene betyder.

Bemærkning

Det er klart, at "hunden siger miav" ville være sand, hvis vi havde defineret betydningen af orden "hund" anderledes. Men givet, at vi sædvanligvis bruger ordet "hund" om hunde og ikke katte, er "hunden siger miav" falsk. Vi udtaler os altid inden for rammerne af normal sprogbrug.

Øvelse

Hvilke af udsagnene nedenfor er eksempler på definitioner og hvilke er udsagn?

a) "Jeg døber dig Silas"

b) "Silas er 10 år gammel."

c) "Hovedstaden i Danmark hedder København."

d) "π er forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter"

e) "2+2=4"

f) "2+2=5"

g) "Kvadratroden af 9 er det positive tal, som giver 9, når man ganger det med sig selv."

h) "Kvadratroden af 9 er 3."

i) "Hypotenusen er den side i en retvinklet trekant, der ligger over for den rette vinkel."

j) "I en retvinklet trekant med sider 3 og 4 er hypotenusen 5"

k) "$a^2=a\cdot a$"

l) "$a^2\cdot a^3=a^5$"

Forslag til gruppearbejde - definitioner kan ikke bevises, sætninger skal bevises

Alle grupper tildeles et kapitel hver i lærebogen og finder definitioner og sætninger.

Grupperne skriver definitionerne og sætningerne af uden at skrive, om de er definitioner eller sætninger.

Grupperne giver deres afskrifter videre til nabo-gruppen, som skal sortere definitionerne og sætningerne fra hinanden.

Øvelser om eksistensen af naturlige tal

Legoklodser og modellervoks

Medbring legoklodser og modellervoks og flyt rundt med begge dele.

Hvilket tal svarer denne bunke klodser til?

Hvilket tal svarer denne klump modellervoks til?

Tæl klassen (hvad betyder det? Hvad er enheden?).

Tæl næser. Tæl ører. Tæl tasker. Tæl blyanter og matematikbøger.

Kaniner og vanddråber

Vi har en kanin og en kanin mere. Der går et år. Hvor mange kaniner har vi nu? Hvad er 1+1?

Vi har en vanddråbe og en vanddråbe på vej ned ad en rude. De mødes. Hvor mange vanddråber har vi nu? Hvad er 1+1?

Formål med øvelserne

Tal er ikke umiddelbart en egenskab ved fysiske genstande - for det er ikke éntydigt om modellervoksen skal tælles som 1, 2 eller 100.000. Eller éntydigt, at 1+1 giver 1, hvis man regner i kaniner og regndråber.

Skal nogen have tænkt på et tal for at det findes?

Tag alle mennesker, der har levet indtil nu. Tag det største tal de hver især har tænkt på. Tag det største af alle de mange store tal. Læg 1 til. Det må være det største tal, nogen nogensinde har tænkt på. Fandtes det for 10 minutter siden? Hvis ja, hvordan? Hvis nej, gjaldt de almindelige regneregler så kun op til det hidtil største tal? Gælder de for det nye tal?

Taltegn

Spørg: Er 3 større end 2 ?

Tal-tegn. Vis hieroglyffer, kileskrift, romertal, grækernes bogstaver. Er det tal? Bland evt. med bogstaver fra andre alfabeter og spørg, hvilke af tegnene der er tal.

Havde symbolet $7^{\frac{2}{3}}$ en mening før mennesker fandt på potensregneregler?

Tereses lidt kontroversielle, strukturalistisk inspirerede konklusion: tal er det, der opfører sig i overensstemmelse med regnereglerne. Derfor kan *i* f.eks. være et tal.

Øvelser om grænseværdier og eksistens af tal

$\frac{1}{3}$ som brøk og tilnærmet med decimaltal

Er 0,3 det samme som $\frac{1}{3}$? Er 0,33 det samme som $\frac{1}{3}$?

Er 0,33333333333333333333333333333333333333 det samme som $\frac{1}{3}$?

Er $0,\overline{3}$ det samme som $\frac{1}{3}$?

Begrund jeres svar. Hvornår er to tal ens?

Tallet $0,\overline{9}$ og tallet 1

Er $0,\overline{9}$ forskelligt fra tallet 1?

Hvis ja, er forskellen større end 0,0001? End 0,000000000000001? End 10^{-100}?

Hvis nej, hvorfor? Hvornår er to tal ens?

Intervaller - uendelige mængder

Hvilke endepunkter (om nogen) har intervallet $[0;1]$?

Kan intervallet $]0;1[$ skrives som et lukket interval? Hvilke endepunkter ville det have?

Er "det mindste positive tal, der er skarpt større end 0" et tal? Hvis ja, hvilket? Hvis nej, hvorfor ikke?

Er "det største tal, der er skarpt mindre end 1" et tal? Hvis ja, hvilket? Hvis nej, hvorfor ikke?

Lommeregneren har kun endeligt mange tal-repræsentationer til sin rådighed

Tast 1000^{1000} ind på jeres lommeregner. Min svarer ∞. Hvorfor?

Hvor store tal kan jeres lommeregnere håndtere?

Tast 10^{-1000} ind på jeres lommeregner. Min svarer 0. Er det rigtigt? Hvorfor siger lommeregneren det? Hvor små tal kan jeres lommeregner håndtere?

Grænseværdier

Talfølgen

1, 0.1, 0.01; 0.001; 0.0001; 0.00001 …

har en grænseværdi. Hvad er den?

Har talfølgen

1 10 100 1000 10000 100000…

en grænseværdi? Hvorfor/hvorfor ikke?

Eksistens af tal: hvilke af disse beskrivelser er beskrivelser af et fast tal?

Forholdet mellem en cirkels omkreds og dens diameter.

Forholdet en cirkels volumen og dens diameter.

Det mindste tal større end 2.

Grænseværdien af følgen 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1….

Grundtallet for den naturlige logaritme.

Det mindste tal, der kan defineres med højst 20 ord.

Det positive tal, der giver 3, når man ganger det med sig selv.

Det sidste tal i talrækken.

Det første tal i rækken af naturlige tal.

Det første tal i rækken af hele tal.

Grænseværdien af følgen 0, 0, 0, 0, 0, ….

Den tredje rod af kvadratet på syv.

Kvadratroden af minus syv.

Øvelser om rationale og irrationale tal

Alle decimaltal er brøker

Skriv 0,234 om til en brøk

Skriv 0,111 om til en brøk

Skriv 3,1415 om til en brøk

Ikke alle tal kan skrives om til brøker (uden brug af 'gentagelses'-notation)

Nævn mindst 3 tal, der ikke kan skrives som brøker.