Om brugen af matematiske tegn og objekter i en god matematisk fremstilling

af Petur Birgir Petersen

Et særpræg ved matematik som videnskab er den udstrakte brug af symboler. Det er vigtigt at symbolerne anvendes på en klar og meningsfyldt måde, således at den matematiske tekst bliver klar og sammenhængende. Formålet med denne artikel er at skærpe opmærksomheden omkring en klar og sammenhængende brug af matematiske tegn og objekter i en skriftlig eller mundtlig fremstilling af matematik. Artiklen vil kunne anvendes i forbindelse med et kort forløb om god matematisk stil fra anden halvdel af 1.g og fremefter.

Åbne og lukkede udtryk og udsagn.

Ved *lukkede udsagn* forstås sammenstillinger af ord eller symboler, som udtrykker en påstand, som kan være *sand* eller *falsk*.

Eksempel 1:

I 2009 var der færre færinger end danskere.

Danmark er en by i Sverige.

$$2+2=4\,.$$

$$2+2=5\,.$$

Udsagnet $2+2=4$, der er *sandt*, består dels af de to lukkede *udtryk* eller *navne* $2+2$ og 4, dels af lighedstegnet, der forbinder de to udtryk.

Specielt for matematikken er dens brug af *variable*, som er symboler, der repræsenterer flere navne på en gang. For eksempel kan vi lade x, y, eller z repræsentere et vilkårligt reelt tal. Bemærk at variable altid skrives i kursiv, når man benytter elektronisk tekstbehandling. Ved indføring af variable i udtryk og udsagn fremkommer *åbne udtryk* og *åbne udsagn*.

Eksempel på et åbent udtryk: $2x+3$.

Eksempel på et åbent udsagn: $2x+3=5$.

For at opnå generelle resultater anvender man også en anden type variabel, som kaldes *arbitrære konstanter*. Idéen er, at de arbitrære konstanter kan vælges tilfældigt, men at de derefter ikke ændrer sig. Arbitrære konstanter betegnes oftest med de første bogstaver i alfabetet (i *kursiv*).

Eksempel 2: Ligningen for en ret linje, som ikke er parallel med *y*-aksen er: $y=ax+b$.

Her er *a* og *b* arbitrære konstanter, hvor *a* kaldes hældningstallet og *b* er skæringen med *y*-aksen. Punkterne på linjen er så givet ved koordinaterne (x,y), hvor *x* og *y* er valgt således, at ligningen er et sandt udsagn. Man siger at *x* er en *uafhængig* (eller *fri*) variabel, og *y* er en afhængig variabel, idet *y* afhænger af værdien af *x*. I eksemplet $y=2x+3$ har vi fastsat konstanterne til $a=2$ og $b=3$. Et punkt på den linje, som ligningen repræsenterer, er f.eks. punktet med *koordinaterne* $(1,5)$, idet $5=2\cdot 1+3$ er et sandt udsagn.

Opgave 1: Undersøg om punktet med koordinaterne (3,7) ligger på linjen givet ved ligningen $y=2x+3$, og angiv en metode til at beregne koordinater til punkter på linien.

Hvis man arbejder med så mange variable, at bogstaverne i alfabetet inklusive de græske har svært ved at slå til, kan man *indeksere*. Det betyder at man indfører en nummerering bag ved bogstaverne med *sænket skrift*. Hvis man f.eks. arbejder med ligningerne for to linjer, kan man skrive disse således:

$$y=a_1x+b_1$$

$$y=a_2x+b_2$$

Her udtales a_2 således: ”a to” og ikke ”a i anden”.

Opgave 2: Find skæringspunktet mellem linjerne givet ved ligningerne

$$y=2x-3$$

$$y=4x+5$$

Kontrollér om indsættelse af de fundne værdier for x og y gør begge ligningerne i ligningssystemet til sande udsagn.

Generalisér løsningsmetoden ved at udlede en formel, der for $a_1 \neq a_2$ udtrykker koordinaterne til skæringspunktet (x, y) mellem linjerne givet ved ligningerne $y = a_1 x + b_1$ og $y = a_2 x + b_2$ ved de arbitrære konstanter a_1, a_2, b_1, b_2. Kontrollér formlen ved at anvende den på det ovenstående ligningssystem.

Nogle matematiske tegn og objekter.

Her vil vi specielt omtale tre typer objekter:

- *Tal* - som i denne sammenhæng generaliseres til også at omfatte åbne udtryk såsom
$$2x+3$$
- *udsagn* (som bl.a. omfatter ligninger og uligheder)
- *mængder* - såsom mængden $\mathbb{N}$ af naturlige tal, eller mængden $\{1, 2, 3\}$, der indeholder *elementerne* 1, 2 og 3

Disse tre typer objekter kan hver især forbindes med ganske bestemte tegn. Her følger et skema, der viser nogle af mulighederne. Idéen er, at man *enten* forbinder tal *eller* udsagn *eller* mængder, og ikke sammenblander forskellige typer objekter. Endvidere skal man holde sig til den type objekt, som man nu arbejder med.

Objekt	Kan forbindes med følgende tegn
Tal	$=$ $\neq$ $<$ $\leq$ $>$ $\geq$
Udsagn	$\Rightarrow$ $\Leftarrow$ $\Leftrightarrow$ $\wedge$ $\vee$
Mængder	$\cup$ $\cap$ $\subset$ $\subseteq$ $\supset$ $\supseteq$ $\not\subset$ $\setminus$

Således er det eksempelvis ikke tilladt at skrive $(a+b)^2 - 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2$, fordi $(a+b)^2 - 2ab$ ikke er et udsagn. I stedet skal man skrive $(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$ eftersom objekterne $(a+b)^2 - 2ab$ og $a^2 + b^2$ er udtryk, der repræsenterer tal.

Et andet eksempel er løsning af ligningen $2x+3=5$. Dette er en *ligning* fordi objektet indeholder en venstreside og en højreside, som er forbundet med et lighedstegn. Ligningen er samtidig et åbent udsagn på grund af den variable *x*. At løse ligningen er at finde de værdier for *x*, der gør udsagnet sandt. Dette kan vi gøre ved hjælp af de velkendte omformningsregler:

Ligningen er $2x+3=5$.

Vi trækker 3 fra på begge sider af lighedstegnet og får:

$$2x = 2$$

Derefter dividerer vi med 2 på begge sider, og får:

$$x = 1$$

Denne argumentation kunne også opstilles klart uden brug af tekst således:

$$2x+3=5$$

$$2x = 5-3$$

$$x = \frac{2}{2}$$

$$x = 1$$

Det vil være korrekt, men ikke nødvendigt at forbinde ligningerne med dobbeltpile (biimplikationspile), der fortæller at ligningen før og ligningen efter en dobbeltpil har de samme løsninger:

$$2x+3=5 \Leftrightarrow 2x = 5-3 \Leftrightarrow x = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x = 1$$

Ifølge skemaet vil det derimod være decideret forkert at forbinde ligningerne med lighedstegn:

$$2x+3=5=2x=5-3=x=\frac{2}{2}=x=1$$

):

Lighedstegnet betyder jo, at tallene før og efter lighedstegn er ens, hvilket i den viste forkerte brug af lighedstegn fører til nonsens som $5=5-3=1$.

Opgave 3: Find fejlen:

$$2x^2+3x=5x \Leftrightarrow 2x^2=2x \Leftrightarrow x=\frac{2x}{2x} \Leftrightarrow x=1$$

Opgave 4: Opstil en formel, der for $a_1 \neq a_2$ udtrykker løsningen til ligningen $a_1x+b_1=a_2x+b_2$ ved de arbitrære konstanter a_1, a_2, b_1, b_2. Anvend formlen til at løse ligningen

$$4x+5=2x-3$$

Kontrollér om indsættelse af den således fundne værdi for x gør ligningen til et sandt udsagn.

Endnu et eksempel på ukorrekt brug af tegn:

$$x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \vee -3$$):

Her er fejlen at disjunktionstegnet $\vee$ skal bruges mellem udsagn, og -3 er ikke et udsagn.

Det vil derimod være korrekt at skrive $x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-3$.

Det kan i øvrigt anbefales at bruge ordet *eller* i stedet for tegnet $\vee$, således:

$$x^2=9 \Leftrightarrow x=3 \text{ eller } x=-3$$

Man kan også her droppe dobbeltpilen og skrive:

$$x^2=9$$

$$x=3 \text{ eller } x=-3$$

Alternativt:

$$x^2=9$$

$$x = \begin{cases} 3 \\ -3 \end{cases}$$

Eller:

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Man ser også følgende notation:

$$x^2 = 9$$

$$x = 3, -3$$

I dette sidste tilfælde selvfølgelig sørge for at løsningsangivelsen ikke kan sammenblandes med en decimaltalsnotation, hvilket sker hvis man skriver $x = -3{,}3$. Denne sammenblanding kan selvfølgelig kun ske, hvis man anvender *dansk decimalkomma*.

Opgave 5: Tegnet $\Rightarrow$ kaldes en *implikationspil*, og bruges mellem udsagn således at *hvis* udsagnet før pilen er sandt, *så* er udsagnet efter pilespidsen også sandt. Man kan lade udsagnene bytte side, forudsat at man vender pilen i den modsatte retning. Tegnet $\Leftrightarrow$ er en dobbeltpil også kaldet *biimplikationspil*, som er en kombination af to modsat rettede implikationspile.

Afgør for hvert af disse eksempler om brugen af implikationspilen er ”korrekt” i den forstand, at det sammensatte udsagn er sandt:

i. $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$
ii. $x^2 = 9 \Leftarrow x = 3$
iii. $x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$
iv. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$
v. $x^2 = 9 \Rightarrow x = -3 \vee x = 3$
vi. $x^2 = 9 \Leftarrow x = -3 \vee x = 3$
vii. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$
viii. $x^2 = 9 \Rightarrow x = -3 \vee 3$

Uligheden $x^2 \leq 2$ (kan læses som x^2 er højst to) har eksakt løsningerne $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ (kan læses som x er mindst $(-\sqrt{2})$ og højst $\sqrt{2}$). Dette kan også skrives således:

$$x^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

eller

$$x^2 \leq 2 \iff x \in \left[-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\right]$$

Hvilket betyder at x er element i det lukkede interval fra $-\sqrt{2}$ til $\sqrt{2}$.

Det vil være forkert at skrive $\sqrt{2} = 1{,}4142$ fordi tallet efter lighedstegnet blot er en *tilnærmet* eller *approksimeret* værdi af kvadratrod 2. Rigtigere vil det være at skrive $\sqrt{2} \approx 1{,}4142$ hvor det krøllede lighedstegn betyder *næsten lig med*. Approksimerede værdier anføres ofte som slutresultat på en praktisk beregning, som er behæftet med en vis usikkerhed. Derimod vil det være meningsløst at skelne mellem lukkede og åbne intervaller, hvis endepunkterne er approksimerede. I forbindelse med definitionsmængdebestemmelser vil det være direkte forkert at benytte sig af tilnærmede værdier. Således er udtrykket $\frac{5}{x^2-2}$ defineret for alle x bortset fra $\pm\sqrt{2}$. Anderledes udtrykt er den størst mulige definitionsmængde for udtrykket $\frac{5}{x^2-2}$ lig med $\mathbb{R} \setminus \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, hvor $\mathbb{R}$ betegner de reelle tals mængde.

Opgave 6: At $A \subseteq B$ betyder at mængden A er en delmængde af mængden B. Dette er det samme som at alle elementer i A også er elementer i B. At $B \supseteq A$ betyder ligeledes at A er en delmængde af B.

Afgør hvilke af følgende udsagn, der er sande:

a) $[-1{,}4142; 1{,}4142] \subseteq \left[-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\right]$

b) $[-1{,}4142; 1{,}4142] \supseteq \left[-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\right]$

c) $[-1{,}4142; 1{,}4142] \subseteq \left]-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\right[$

d) $[-1{,}4142; 1{,}4142] \supseteq \left]-\sqrt{2}\,; \sqrt{2}\right[$

e) Den størst mulige definitionsmængde for udtrykket $\frac{5}{x^2-2}$ er lig med

$$\mathbb{R} \setminus \{1,4142, -1,4142\}$$

f) Den størst mulige definitionsmængde for udtrykket $\frac{5}{x^2-4}$ er lig med $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$

Afslutningsvis et par ord om regnemaskiner og computere:

På mange maskiner og programmer er det muligt at vælge mellem eksakt og approximeret værdi. I en ren matematikopgave vil eksakte værdier altid være til at foretrække, men i praktiske opgaver og modelopgaver er det en god idé at approximere slutresultater til eksponentiel notation med et realistisk antal betydende cifre. Den udbredte og nødvendige brug af CAS – værktøjer forleder en del mennesker til at bruge et programmerings sprog i en tekst. Dette fører til dårlig matematisk stil. Således bør sætningen: Jeg solver ligningen $2x+3=5$ og får 1, omskrives til eksempelvis:

Ligningen $2x+3=5$ har løsningen $x=1$.

I en eksamenssituation kan det dog være hensigtsmæssigt, som en note, at tilføje kommandoen solve($2x+3=5$, x) enter 1 som en supplerende dokumentation.

Facitliste til opgaverne:

Opg. 1: Udsagnet $7 = 2 \cdot 3 + 3$ er falsk, og derfor ligger punktet ikke på linjen. Metode til bestemmelse af punkter: Vælg en x-værdi og beregn den tilsvarende y-værdi af forskriften.

Opg. 2: Skæringpunktet er givet ved $(x, y) = (-4, -11)$.

Formlen for skæringspunktet er $(x, y) = \left(\frac{b_1-b_2}{a_2-a_1}, \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2-a_1}\right)$

Opg. 3: Det er ikke tilladt at dividere med 0. Det, vi finder ved at dividere med $2x$ er derfor løsninger forskellige fra 0. Bedre metode er opløsning i faktorer kombineret med nulreglen:

$$2x^2+3x=5x \Leftrightarrow 2x^2-2x=0 \Leftrightarrow 2x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Opg. 4: Formlen er $x = \frac{b_1-b_2}{a_2-a_1}$

Indsættelse af $a_1 = 4, a_2 = 2$, $b_1 = 5$, $b_2 = -3$ giver $x = -4$

Opg. 5: I spørgsmål i , ii , v , vi , og vii er implikationspile anvendt korrekt, således at det sammensatte udsagn er sandt.

Opg. 6: Udsagnene a) , c) og f) er sande.

Gode baggrundsartikler fra internettet:

http://www.uvmat.dk/skrift/

(Om den nye skriftlighed i matematikundervisningen. Indeholder gode råd til udformningen af skriftlige eksamensbesvarelser).

http://ems.calumet.purdue.edu/mcss/kevinlee/mathwriting/writingman.pdf

(Dr. Kevin P. Lee: A Guide to Writing Mathematics. Underholdende artikel på gymnasieniveau, som indeholder mange eksempler på god og dårlig stil i opgavebesvarelser).

http://www.math.washington.edu/~lee/Courses/583-2005/writing.pdf

(Notes on Writing Mathematics. Denne tekst behandler god matematisk stil fra et overordnet perspektiv, hvor der lægges vægt på tekstens logiske sammenhæng og disposition. Velegnet som baggrund for større skriftlige arbejder).

Bøger:

Leonard Gillman: *Writing Mathematics Well*, Mathematical Association of America, 1987, ISBN – 0-88285-443-0.

(Virkelig god lille bog om udformningen af større skriftlige arbejder i matematik. Omhandler blandt andet god disposition, bevisførelse og notation i en matematisk tekst).

Norman E. Steenrod, Paul R. Halmos et al: *How to Write mathematics*, American Mathematical Society, 1975,
ISBN 0-8218-0055-8.

(Her er det Paul Halmos artikel om udformningen af en matematisk tekst, der kan anbefales. Artiklen er inddelt i små afsnit med friske overskrifter såsom: 'Say Something', 'Speak to Someone', 'Resist Symbols' og 'Use Symbols Correctly').

Erik Kristensen og Ole Rindung: *Matematik* 1, 10. udgave, C.E.C Gads forlag, 1981. (Kapitel 1 indeholder en fin vejledning til mængder, udsagn og udsagnslogik. Herunder brugen af tegn og symboler).