Aristoteles om uendelighed

Af Charlotte Stefansen

En af de stridigheder man møder inden for matematik vedrører, om man kan tillade brugen af uendeligheder. Groft sagt kan man dele opfattelser af matematik ind i to retninger: realisme og konstruktivisme. Førstnævnte opfatter de matematiske objekter (tal, mængder, geometriske figurer etc.) som havende en eksistens uafhængig af os mennesker. Sidstnævnte mener til gengæld, at de matematiske objekter er konstruktioner fra menneskets side, og derfor ikke vil kunne være til uafhængigt af os. Kort sagt: er de matematiske objekter noget vi opdager eller noget vi opfinder? Alt afhængig af hvilken retning man tilslutter sig, vil man have forskellige opfattelser af uendelighed. Hvis man har en konstruktivistisk tilgang vil uendelighed ikke umiddelbart skabe de store problemer, men til gengæld kan den matematiske realisme støde ind i forklaringsproblemer.

I gymnasieskolen kommer man heller ikke udenom brug af begrebet om uendelighed. Allerede når vi lærer at tælle, skal vi forholde os til, at tallinjen fortsætter i det uendelige. Og når vores talbegreb udvides til at indeholde de reelle tal, skal vi forholde os til, at man altid kan 'grave' dybere ned mellem to tal, og finde et nyt tal – dette kan også fortsætte i det uendelige. I de grafiske repræsentationer af funktioner, der er definerede for alle reelle tal, taler vi om at koordinatsystemets akser 'fortsætter i det uendelige'. Og når vi arbejder med grænseværdier, skal vi også forholde os til udtryk som 'for x gående mod *uendelig*'. Selv for grænseværdier 'for x gående mod 0' kommer vi ud i overvejelser omkring uendeligheder, når man skal forestille sig, at en størrelse kan komme helt tæt på 0, men aldrig være lig med 0. I forbindelse med (Euklidisk) geometri kommer man også ud for uendelighed i forbindelse med definitionen af parallelle linjer, som linjer der fortsætter i det uendelige og som aldrig vil skære hinanden.

Her skal vi dog ikke fokusere så meget anvendelse af uendelighed indenfor matematikken, altså i hvilke tilfælde uendelighed kommer i spil, og vi vil heller ikke gå i detaljer med distinktionen mellem realisme og konstruktivisme. I stedet skal vi se på, hvilke vanskeligheder begrebet om uendelighed kan præsentere for os – også i sammenhæng med matematikken. For hvordan skal vi forstå uendelighed? Er uendelighed en virkelig størrelse? Eller er det et begreb vi har taget i brug, så matematikken bedre kan hænge sammen?

Det er ikke ligefrem revolutionerende at spørge til begrebet om uendelighed, da dette er blevet gjort af så mange andre (især filosoffer) mange gange før. Men til gengæld kan det være interessant at se på, hvad disse andre har gjort sig af overvejelser netop om uendelighed.

En filosof, der undrede sig over uendelighed, var Aristoteles (384-322 fvt.). Aristoteles var født i Stageira nær Makedonien, men som 17-årig tog han til Athen for at studere ved Platons Akademi. Her blev han i 20 år indtil Platons død, hvorefter han rejste først til Assos og senere Lesbos. I 343 blev Aristoteles kaldt til Makedonien, hvor han skulle arbejde som huslærer for kong Philips 13-årige søn, senere kendt som Alexander den Store. Man mener Aristoteles blev i Makedonien i 3 år. Senere vendte Aristoteles tilbage til Athen, hvor han underviste i det offentlige Lykeion – en slags gymnasium. I 323 døde Alexander den Store, hvilket medførte opstand og en anti-makedonsk bølge i Athen. Derfor rejste Aristoteles til Chalkis, hvor han havde familie. Her døde han året efter. Aristoteles er kendt for at have skrevet et stort antal skrifter omhandlende alt fra biologi, etik og politik. Men også logik, psykologi og retorik.[22]

I sin bog om fysik (kaldet 'Fysikken') undersøger Aristoteles naturen – eller nærmere betegnet 'de naturlige ting'. Ifølge Aristoteles, så har matematikeren og fysikeren i en vis forstand et fælles genstandsområde: flader og rumfang, linjer og punkter. I forbindelse med disse genstande siger Aristoteles, at man vil være nødt til komme ind på at tale om uendelighed. Fysikerens undersøgelse af naturen indeholder en undersøgelse af *bevægelse* og *forandring*, da naturen netop er udgangspunkt for disse. Bevægelse har at gøre med det kontinuerlige, som igen baseres på et begreb om *uendelighed* (idet det kontinuerlige er noget, der kan deles i det uendelige). Bevægelse, siger Aristoteles, kan ikke lade sig gøre uden rum og tid. Og her er der igen brug for et begreb om det uendelige, da fx tiden ikke har nogen begyndelse (eller afslutning). Så en person som arbejder med naturvidenskab er nødt til at undersøge det uendelige for at finde ud af, om det findes eller ej – og hvis det findes, hvad det så er for en størrelse.

Aristoteles henviser til Pythagoræerne og Platon og deres opfattelse af uendelighed. Pythagoræerne søger det uendelige i de ting, der kan sanses og ser det uendelige som havende en selvstændig væren. Dette betyder faktisk, at selv om der ikke var en verden til, som vi kunne sanse – og selv hvis vi mennesker heller ikke var til – så ville der stadig være uendelighed. At uendelighed skulle have en sådan selvstændig væren afvises af Aristoteles. Platon derimod anser det ikke for muligt, at der skulle findes noget (uendeligt) udenfor universet, men mener alligevel, at det uendelige findes både i de sanselige ting og i ideerne uafhængigt af mennesket – men der kræves altså et univers, hvor der uendelige kan være. Også denne opfattelse er Aristoteles skeptisk overfor. For hvordan får vi mennesker så adgang til dette uendelige? Hvordan kan vi opleve det?

Aristoteles giver nogle eksempler på sammenhænge, hvor man støder på uendelighed: Tid er uendelig i den forstand, at den altid har været og altid vil være. Talrækken er også uendelig – dog skal vi huske på, at for Aristoteles er der alene tale om de naturlige tal. Talrækken har en begyndelse (tallet 1), men vil så kunne fortsættes i det uendelige, da man altid kan føje et større tal til. Kontinuerte størrelser (fx en linje) vil altid kunne deles i mindre størrelser – og vil kunne deles i det uendelige. De reelle tal er også et godt eksempel på kontinuerte størrelser – dog ikke et eksempel Aristoteles selv ville have omtalt, da matematikken på Aristoteles tid ikke opererede med den reelle talrække. Hvis man tager en delmængde af de reelle tal, vil man altid kunne udtage en ny delmængde, og endnu en og således i det uendelige. For eksempel kan vi dele intervallet fra 0 til 1 og udtage intervallet fra 0 til ½ osv.

Men hvis uendelighed undersøges nærmere vil vi ifølge Aristoteles se, at der ikke findes noget legeme som i realiteten er uendeligt – eller med Aristoteles ord: er i besiddelse af en *aktuel* uendelighed. Med dette mener han, at lige meget hvor vi mennesker leder, så vil vi ikke kunne finde

[22] Der er endda tegn på at Aristoteles skulle have skrevet et værk om komik – men dette er gået tabt for eftertiden (Umberto Eco's *'Rosens Navn'* har et underholdende bud på, hvad der er sket med dette værk – filmatiseringen kan også anbefales).

noget eksempel på uendelighed i 'den virkelige verden'. Dette overfører Aristoteles direkte til andre størrelser (som ikke nødvendigvis er noget vi kan tage og føle på): fx tid og linjer. Aristoteles mener, at den manglende aktuelle uendelighed også må skabe problemer for disse andre mere abstrakte størrelser: for så må der være en begyndelse og ende på tiden, linjer kan ikke blive ved med at blive opdelt i mindre stykker, og talrækken kan ikke være ubegrænset. Hvordan skal dette løses? For det lader til at i én forstand findes det uendelige, men i en anden forstand gør det ikke[23].

Når Aristoteles taler om at noget findes, eller eksisterer som et værende, så kan det gøre dette på to måder: dels mulig væren (*potentiel* væren) og dels virkelig væren (*aktuel* væren). Men at der skulle findes nogen uendelig størrelse i virkeligheden, dvs. at der findes aktuel uendelighed, mener Aristoteles at have tilbagevist. Derfor må uendelighed kun kunne findes som en mulighed – altså potentielt.

Væren har ifølge Aristoteles mange betydninger: fx når vi siger, at dagen *er* til, eller når vi siger, at der *findes* olympiske lege. Her mener Aristoteles, at vi både kan tale om mulighed og virkelighed. For når vi siger, at der findes olympiske lege – så er det både som mulighed (dvs. at de olympiske lege kan finde sted på et tidspunkt) og som virkelighed (at de olympiske lege faktisk finder sted – hvilket de jo gør hvert 4. år). Aristoteles giver ikke selv flere eksempler, som kan illustrere forskellen mellem aktuel og potentiel væren, men vi kan jo også vende blikket mod matematikkens verden for et eksempel. Andengradsligninger har potentielt ingen, én eller to løsninger. Når ligningen er løst er løsningen blevet aktuel.

Det uendelige findes til gengæld kun som en mulighed. Man kan blive ved med at forøge eller dele en størrelse i det uendelige – men dette er kun udtryk for en potentiel uendelighed. Hvis vi fx ser på opdelingen af en linje, så vil vi potentielt kunne gøre dette i det uendelige – men aktuelt vil vi aldrig kunne afslutte en sådan deling, for vi er begrænset af vores levetid. Derfor vil den uendelige opdelingen aldrig være færdiggjort, og altså heller ikke fuldt ud aktualiseret. Ifølge Aristoteles skal uendeligheden kunne begribes af én enkelt person, for at være aktuel. I sagens natur, kan en enkelt person ikke dette. En enkelt person vil fx heller ikke kunne være vidne til en talrække, der fortsætter i det uendelige, da mennesket med Aristoteles ord er et endeligt væsen, begrænset i tid (og rum).

Problemer for matematikken

Aristoteles mener selv, at hans egen fremstilling af det uendelige som noget, der kun er potentielt værende, ikke skaber problemer for matematikken. For ifølge Aristoteles er det ikke strengt nødvendigt for matematikere at gøre brug af uendeligheder, men de kan fx nøjes med begrænsede linjer – for sådanne kan jo deles på samme måde som en uendelig størrelse (altså som ren mulighed). Og i forbindelse med matematikkens beviser, vil det heller ikke gøre nogen forskel om uendelighed kun er til som mulighed. Uendelighed som virkelighed må til gengæld afvises, da der netop ikke findes virkelige størrelser som er uendelige.

[23] En lignende problematik ses også ses astronomien, hvor man taler om et uendeligt univers, men hvori der stadig kun er et endeligt (om end meget stort) antal partikler. Man ville måske tro, at der så også ville være et uendeligt antal partikler i dette uendelige univers.

Dette kan dog skabe problemer for anvendelsen af matematik i dag. For hvor Aristoteles skelner skarpt mellem matematikken som en abstrakt, teoretisk disciplin og fysikken som en virkelig, anvendelig disciplin, så er det jo ikke sådan, at vi i dag holder matematik og fysik skarpt adskilte. Og her er der tilfælde, hvor man i fysikken benytter teori fra matematik, som indeholder et element af uendelighed (fx fysikkens brug af differentialregning til at beskrive fart eller acceleration). Er vi så ikke tilbage i en gråzone igen, hvor det er svært kun at se uendelighed som en mulighed, men at det også må findes som en virkelighed?

Aristoteles og Zenon

Aristoteles var langt fra den første til at behandle begrebet om uendelighed. En tidligere græsk filosof, som vi kun fragmentarisk har kendskab til (bl.a. gennem Aristoteles), Zenon fra Elea, har også udført analyser af begreber som delelighed, kontinuitet og uendelighed. Zenon viser bl.a. gennem sine paradokser, at det værende er udeleligt og at bevægelse ikke er muligt.

Det er gennem Aristoteles og hans *Fysik*, at vi har fået overleveret flere af Zenons berømte paradoxer, bl.a. anekdoten om Achilleus, der skal løbe om kap med en skilpadde og også om pilen, der til enhver tid, vil være i hvile, selv om den flyver gennem luften. I *Fysikken* tilbageviser Aristoteles dog disse paradokser.

Forslag til littereatur:

- ”Klassiske tænkere: Aristoteles' Forelæsninger over Fysik I-IV”, oversat af Poul Helms, 1951 (ny udgivelse 1999), Gyldendal

- ”Matematikkens aspekter – om det uendelige”, Lars Mejlbo, 1991, Matematiklærerforeningen

- ”Den europæiske filosofis historie - Antikken” af Karsten Friis Johansen, 1994, Nyt Nordisk Forlag Arnold Busck,
  (1.del, kap. 5 om Eleaterne (bl.a. Zenon), 4. del om Aristoteles)

- ”*Matematikkens filosofi*” af Stig A. Pedersen i ”Et spadestik dybere”, Vincent F. Hendricks og Steen W. Pedersen (red.), 2008, Automatic Press

- ”Tankens magt (bind 1)”, Hans S. Jensen, Ole Knudsen og Frederik Stjernfelt (red.), 2006, Lindhart og Ringhof
  (afsnittet om 'Antikken' har bl.a. to afsnit om hhv. naturvidenskab og filosofi som beskriver antikkens tankegang)

- ”Matematikken og verden”, Mogens Niss (red.), 2001, Fremad
  (kap. 3 af H.C. Hansen om de to retninger indenfor matematikkens filosofi)

- ”Introducing Philosophy of Mathematics”, Michèle Friend, 2007, Acumen Publishing Limited
  ((meget) amerikansk indføring i matematikkens filosofi, bl.a. med et kapitel om uendelighed)