Matematiske beviser

Af Mads Keinicke

Indledning

Bevisers struktur

Her introduceres en analysemodel der kan bruges til at give overblik over et matematisk bevis og forhåbentlig hjælpe forståelsen af beviset på vej.
Vi indfører modellen ved hjælp af et eksempel. Som eksempel analyseres beviset for Pythagoras sætning.

Pythagoras sætning fortæller os at hvis en trekant er retvinklet så gælder der en bestemt relation mellem sidernes længder, som kan udtrykkes ved den velkendte ligning $c^2 = a^2 + b^2$. Beviset skal derfor være en kæde af ræsonnementer der viser at den særlige egenskab at trekanten har en ret vinkel, logisk fører til at ligningen mellem siderne gælder.

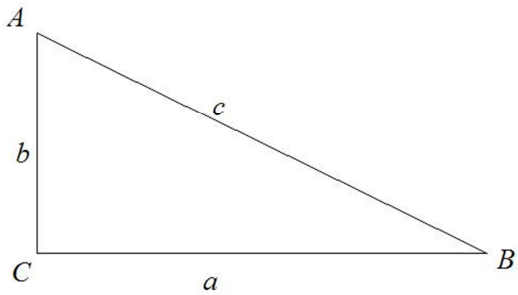
Eksempel Pythagoras sætning

I en lærebog kan sætningen med bevis være formuleret på følgende måde:

Sætning
For en retvinklet trekant med hypotenuse *c* og kateter *a* og *b*, som vist på figuren, gælder:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Eller skrevet med ord, kvadratet på hypotenusen er lig med summen af kvadraterne på kateterne.



Bevis:
Figuren til højre viser et kvadrat med sidelængde *a* + *b*. Arealet af kvadratet er

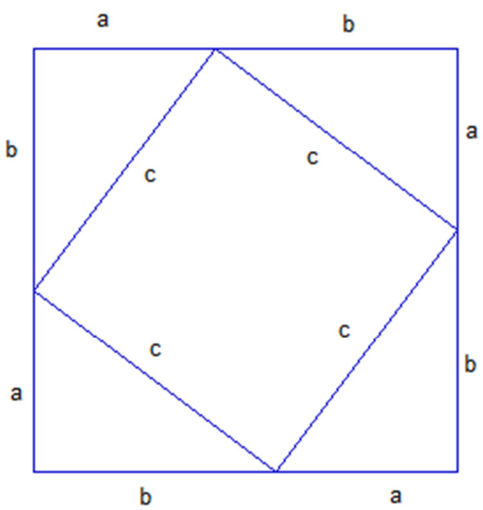
$$A = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Arealet kan tillige beregnes som summen af arealerne af det røde kvadrat og de fire trekanter.

$$A = c^2 + 4\cdot(½\cdot a\cdot b)$$

Arealets størrelse er uafhængigt af beregningsmetoden, altså er

$$c^2 + 4\cdot(½\cdot a\cdot b) = a^2 + b^2 + 2ab$$



Denne ligning omskrives til

$$c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Hermed er sætningen bevist

Vi kan nu opdele beviset i delelementer

Udgangspunkt: Konstruktion af kvadratet med kantlængde a + b og opdelingen af kvadratet i det mindre kvadrat og fire trekanter. Konstruktionen bygger altså dels på forudsætningen om at trekanten er retvinklet og dels på bevisets gennemgående idé, som er beregningen af kvadratets areal på de to måder.

Påstand 1: Ligningen $c^2 + 4 \cdot (½ \cdot a \cdot b) = a^2 + b^2 + 2ab$ gælder

Ræsonnement som fører fra udgangspunktet til påstand 1: Udtrykkene på begge sider af lighedstegnet er fremkommet ved at bestemme arealet af kvadratet. Da begge metoder til bestemmelse af arealet er korrekte og da arealet selvfølgelig er uafhængigt af hvilken metode der bruges er de to udtryk ens.

Ræsonnementet bygger på kendskab til beregning af et kvadrats areal (kvadratet på kantlængden) og beregning af en retvinklet trekants areal (halvdelen af kateternes produkt).

påstand 2: Ligningen $c^2 = a^2 + b^2$ gælder

Ræsonnement som fører fra påstand 1 til påstand 2: Ved reduktion og almindelig ligningsmanipulation omskrives ligningen fra påstand 1 til ligningen i påstand 2.

Konklusion: Påstand to er identisk med sætningen.

Analysen af beviset kan stilles skematisk op som nedenfor

Udgangspunkt: et kvadrat med kantlængde a + b			
	Forudsætninger: trekanten er retvinklet Idé: opskrivning af arealet på to forskellige måder		
		Ræsonnement: Kvadratets areal kan udtrykkes ved to forskellige formler. Da arealet er det samme uanset hvilken formel der bruges er de	**Forudsætninger for ræsonnementet:** Beregning af arealer af kvadrater og retvinklede trekanter.

	to udtryk lig hinanden	Arealets størrelse er uafhængigt af beregningsmetoden. Regler for bogstavregning
Påstand $c^2 + 4\cdot(½\cdot a\cdot b) = a^2 + b^2 + 2ab$		
	Ræsonnement: Ligningen omskrives ved hjælp af tilladte regneoperationer. Den sidste ligning følger derfor af den første, som gennem første ræsonnement følger af at trekanten er retvinklet	**Forudsætninger for ræsonnementet:** Regneregler brugt til reduktion og omskrivning af ligning
Konklusion $c^2 = a^2 + b^2$		

Øvelse vinkelsummen i en trekant

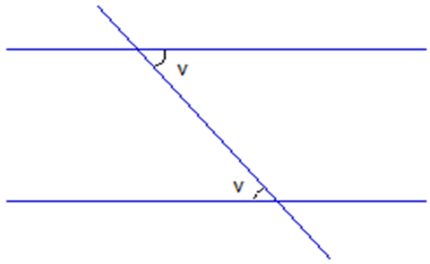
Analyser beviset for sætningen om vinkle summen i en trekant på samme måde som beviset for pythagoras sætning blev analyseret ovenfor

Sætning

Vinkel summen i en trekant er 180°

Bevis:

Når to parallelle linjer skæres af en tredje linje kaldes de vinkler der er markeret på figuren til højre *ensliggende ved parallelle linjer*. Vinkler der er ensliggende ved parallelle linjer er lige store



Vi ser på trekanten *ABC* som er vist på figuren. Gennem vinkelspisen *B* trækkes en linje som er parallel med siden *AC* i trekanten. Ved B er der nu dannet tre vinkler *v*, *u* og *B* under den linje der blev trukket gennem *B*. Disse tre vinkler er tilsammen 180°.

Vinklen *u* og vinklen A i trekanten er ensliggende ved parallelle linjer og derfor lige store. Det samme gælder for vinklerne *v* og *B*.

Heraf ses det at trekantens vinkel sum er 180°