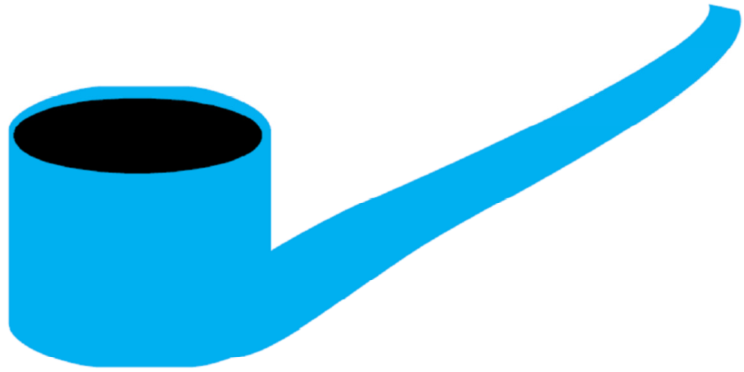
Magrittes pibe og matematisk modellering

Af Jørgen Ebbesen

Den belgiske surrealist René Magritte malede i 1928-1929 ***La Trahison des Images***, på dansk ***Billedernes bedrag***. Billedet er en minutiøs gengivelse af en pibe. Under piben har Magritte skrevet med sirlig skrift: ”Ceci n’est pas une pipe”



Dette er ikke en pibe. Det ligner ikke en gang, og derved går en del af pointen tabt. Men Magrittes arvinger har nedlagt forbud mod, at arbejdsgruppen benytter hans billede. Besynderligt set i lyset af billedets ikonagtige status. Det ligger og flyder alle vegne på nettet, hvad læseren kan forvisse sig om ved en billedgoogling på "Ceci n'est pas une pibe"

Pointen er selvfølgelig, at billedet er en illusion. Det ***forestiller*** en pibe, men det er jo kun ***et billede*** af piben, ikke ***the real thing***.

Maleriet er åbenlyst et manifest og en provokation, for ellers havde Magritte ikke behøvet at skrive teksten på billedet, jf. maleriets titel. Og det er skægt, som han sætter tingene på spidsen ved sin nærmest fotografiske gengivelse af piben. Den naturlige reaktion på billedet er: jo, det er en pibe, hvad skulle det ellers være? Først i anden omgang kommer man i tanke om, at det selvfølgelig ikke kan være en pibe – det er fx svært at ryge af den. I en tid, hvor fotografier og film blev hvermandseje, kan man se Magrittes maleri som en advarsel om ikke at forveksle billeder med virkeligheden, hvor overbevisende de end måtte være.

Da jeg gik i gymnasiet i begyndelsen af 70’erne, stødte jeg ikke på begrebet ***matematisk model*** en eneste gang i matematiktimerne, eller også har jeg fortrængt det. Eksempler fra andre fag – fortrinsvis fysik – blev inddraget i begrænset omfang. Og de tjente til at belyse matematiske begreber og sætninger. Faget matematik var overordnet og styrende.

Da jeg startede som gymnasielærer i begyndelsen af 80'erne, var der en skærpet opmærksomhed på matematiks anvendelse i samfundet. Hvad var der sket i mellemtiden? Den teknologiske udvikling inden for IT gjorde det muligt at håndtere komplekse modeller som fx makroøkonomiske modeller, fiskerimodeller og trafikmodeller. Disse modeller indgik i beslutningsgrundlaget inden for centrale politiske områder. Modelberegningerne blev genstand for berettiget kritik: de var svære at gennemskue og argumentere mod. Parallellen til Magrittes billede blev brugt som en advarsel: modellerne havde billedets besnærende magi, men måtte ikke forveksles med virkeligheden.

Siden er udviklingen fortsat. I Teknologirådets rapport ***Magt og modeller*** fra 1995 opgjordes 48 modeller udviklet i Danmark.

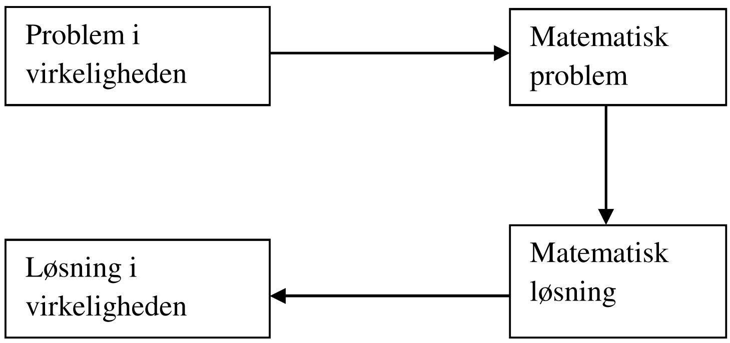
Tabel 1: Udviklingsperiode for de modeller, der er omfattet af undersøgelsen

Tidsinterval	Antal modeller
1960-1969	2
1970-1979	12
1980-1989	19
1990-1995 (obs: 5 år)	15

Matematiske modeller spiller en stadig større rolle i vores moderne samfund på mange niveauer og i mange sammenhænge. Modelberegninger er en vigtig del af det politiske beslutningsgrundlag som allerede anført. I forbindelse med overenskomstforhandlinger er forhandlingsparterne bevæbnet til tænderne med omkostningsberegningsmodeller. Prisfastsættelse og strategier i større erhvervsvirksomheder er baseret på modelberegninger. Inden for områder som biologi og medicin udføres komplicerede modelberegninger muliggjort af avanceret modelleringssoftware og hardware med større og større regnekraft. Nye medicinske præparater kan afprøves på virtuelle patienter, før de testes på levende mennesker.

Ovenstående er kun et lille udvalg af eksempler til belysning af den store og tiltagende samfunds-betydning af matematiske modeller. På den baggrund er det ikke mærkeligt, at der lægges en stadig større vægt på modelleringsaspektet i matematikundervisningen. Både af hensyn til det almendannende perspektiv på uddannelse: tilegnelsen af matematiske kompetencer er vigtig for elevernes mulighed for at blive velfungerende, kritiske samfundsborgere, som kan tage selvstændig stilling til modelberegninger uden at være i lommen på eksperter med uklare interesser. Og til det studieforberedende perspektiv: modelberegninger trænger frem inden for fagområder, som traditionelt har været matematikfri.

Hvad vil det sige at modellere? Det første lidt naive tilløb til at beskrive modelleringsprocessen er, at man "oversætter" det problem, man ønsker at løse, til et matematisk problem. Så løses det matematiske problem inden for faget matematiks trygge rammer. Til sidst "oversætter" vi tilbage til en løsning på det virkelige problem.



 ”Oversættelsen” fra virkeligheden består i en række forenklinger, hvor vi risikerer at reducere problemstillingen i en sådan grad, at selv om vi kan løse det matematiske problem, er løsningen måske uanvendelig. Den skal under alle omstændigheder underkastes en kritisk undersøgelse.

En systematisk fejl ved modellering, er, at modeller har en tendens til at blive kausale i den forstand, at vi gerne vil bruge dem til at forudsige og styre en udvikling. Vi reducerer og systematiserer med dette for øje. Men den virkelighed, vi modellerer, er måske ikke helt så forudsigelig og styrbar, som modellen uvægerligt giver indtryk af.

Traditionelt har vi lagt mest vægt på højre side af diagrammet i matematikundervisningen. Og når sandheden skal frem, har dette ikke ændret sig meget, selv om modellering er blevet mere og mere centralt i læreplanerne. Til skriftlig studentereksamen er ”oversættelsen” i den øverste af de tre pile altid foretaget på forhånd. Det nye er, at matematikopgaverne tager afsæt i virkelighedsnære problemstillinger. Det er så elevernes opgave at gennemskue, hvilken matematikopgave, der gemmer sig mellem linjerne, og løse den.

Det siger sig selv, at det kræver faglig indsigt i det område, man modellerer inden for. Det ligner en fornuftig arbejdsfordeling, hvis vi sørger for, at eleverne stifter bekendtskab med forskellige model-typer og lærer dem at håndtere den nødvendige matematik. Og overlader oversættelsen til fagfolk på aftagerinstitutionerne.

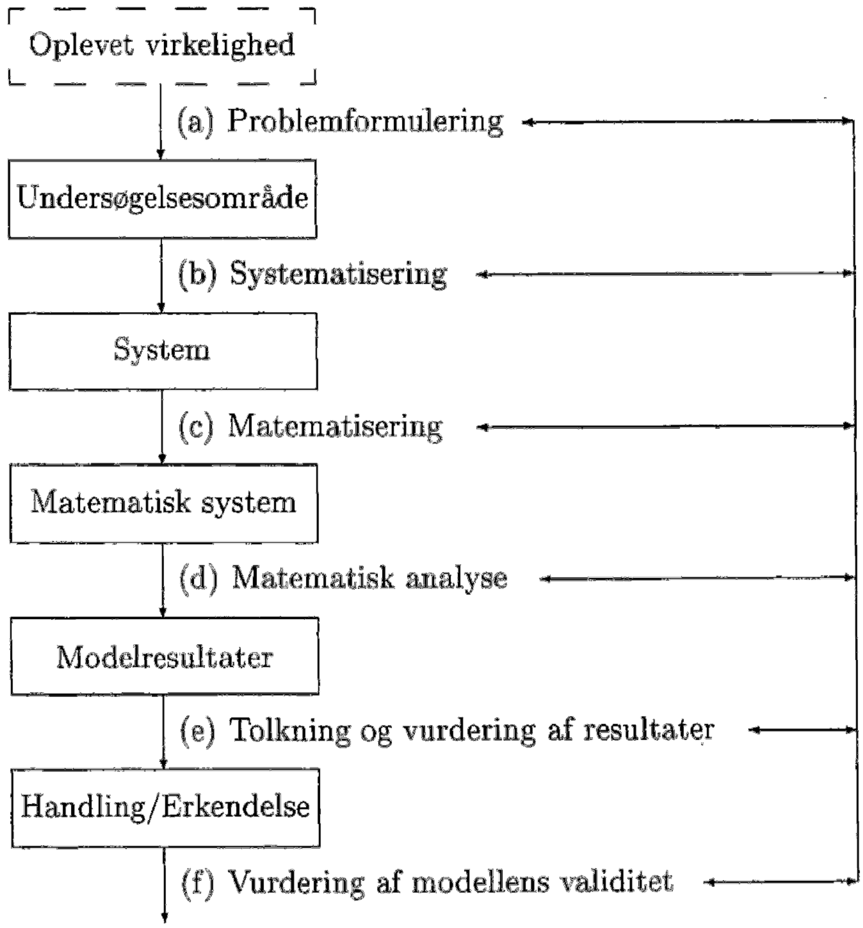
Det viser sig imidlertid, at selv de elever, der er gode til at løse matematiske problemer, har vanskeligt ved at anvende det lærte, når de senere har brug for det i praksis i andre sammenhænge. Det er svært at forstå, når man betragter vores model (sic!) af modelleringsprocessen. Hvis de vandrette pile, som svarer til oversættelse til og fra model, var uafhængige af den lodrette pil, som repræsenterer den matematiske problemløsning, er det uforklarligt, at man ikke bare kan tilføje oversættelsespilene på de videregående uddannelser. Men det virker altså ikke.

Forklaringen er formentlig, at pilene ikke er uafhængige af hinanden, og at den erfarne modelbygger under hele modelleringsprocessen har det virkelige problem i baghovedet. Der findes altså ingen ren matematisk problemløsningsfase. Og ved oversættelsen holder modelbyggeren det matematiske problem, der udkrystalliseres, op i mod sit bagkatalog af modeller. Det nytter fx ikke at bevare kompleksiteten af det virkelige problem i modellen, hvis denne viser sig matematisk uhåndterbar.

Hvis vi vil forstå modelleringsprocessen og de vanskeligheder, der er forbundet med den bedre, er der behov for en mere nuanceret beskrivelse af den.

På RUC, hvor matematisk modellering har spillet en vigtig rolle ved den naturvidenskabelige basis-uddannelse, har man haft glæde af nedenstående mere detaljerede beskrivelse af modellerings-processen.

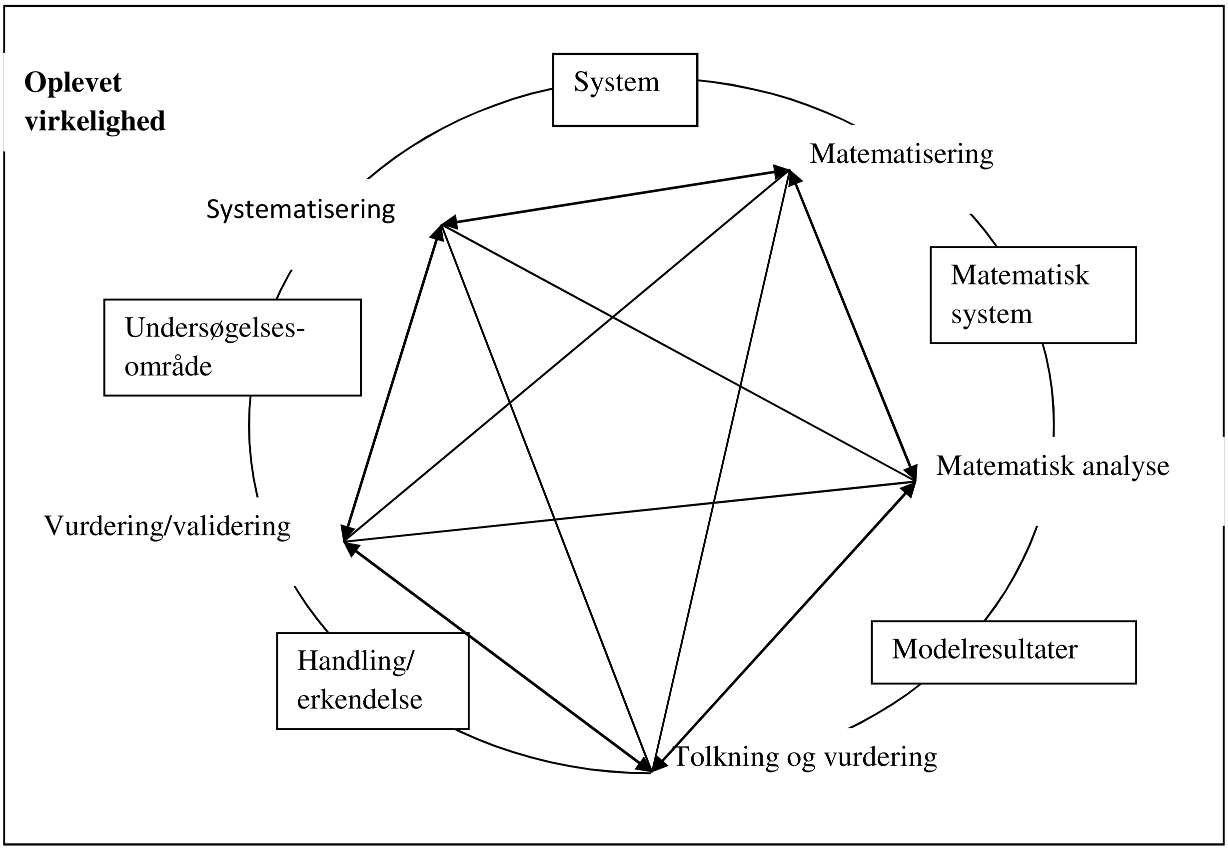
Figur 2.1 En model af den matematiske modelleringsproces



Morten Blomhøj, Thomas Højgaard Jensen, Tine Hoff Kjeldsen og Johnny Ottesen: *Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse – udvikling af et kursus*, IMFUFA tekst 402 2001, side 12.

Den interesserede læser henvises til den udførlige beskrives side 11-18 i rapporten. Ud over den mere detaljerede beskrivelse af modelleringsprocessen tydeliggør modellen det store arbejde, der ligger før matematikken (den lodrette pil fra den naive model er pil (d) her). Desuden viser stisystemet til højre på figuren, at de enkelte dele af processen er koblede: det kan være nødvendigt at gå tilbage og foretage justeringer.

Jeg kan personligt bedre lide opstillingen nedenfor, som understreger de enkelte delprocessers afhængighed af hinanden. Og det cirkulære aspekt af modelleringen: man kan forbedre sin model ved at foretage ekstra gennemløb. Men det er principielt den samme model som ovenfor (bare underkastet en topologisk transformation;)



Hvor meget eleverne får ud af den slags betragtninger, ved jeg ikke. Men hvis man som lærer kan genkende billedet, er det vel oplagt, at det bør have konsekvenser for undervisningen? Fx i form af særligt tilrettelagte forløb, hvor eleverne prøver kræfter med hele modelleringsprocessen. Det ville være oplagt at lade et af projektforløbene være et modelleringsforløb.

Man kunne ved læsning af ovenstående få det indtryk, at matematisk modellering var et forholdsvis nyt fænomen. Det er det ikke. Men karakteren af de matematiske modeller har ændret sig. Takket været IT-udviklingen er vi ikke længere begrænset til at beskæftige os med simple problemer, som har analytiske løsninger. Fokus er flyttet fra grundlæggende lovmæssigheder til mere komplekse problemstillinger. Almindelige gymnasieelever kan vha. CAS-værktøj foretage modelberegninger, som før PC'en blev hvermandseje, krævede indsigt i numerisk analyse, kendskab til et programmeringssprog og adgang til computer. En adgang, som da jeg studerede i 70'erne, var forbeholdt forskere og datalogistuderende.

Man må dog ikke i begejstringen over de nye muligheder overse, at matematik i selve sit udspring er et modelleringsværktøj, det vidner fx ordet geometri om. Grundbetydningen er ***landmåling***. Og historisk har matematik gået hånd i hånd med anvendelser inden for fysik og astronomi. Før renæssancen blev matematikken dog fortrinsvis brugt på den supralunare del af Universet (fra månen og udefter). Her var forbindelsen imidlertid så intim, at astronomien blev opfattet som en del af matematikken.

I løbet af renæssancen kom matematikken ned på jorden;) jf. Galileis berømte faldrendeforsøg.

Det er skæbnens ironi, at Galileis betragtning om matematik som det sprog, naturen er skrevet i, er mere tvetydig end som så. Hvis man tager lidt mere med, lyder citatet nemlig:

Naturfilosofien er skrevet i denne storslåede bog, der altid står åben foran vore øjne (jeg kalder den universet), men som ikke lader sig forstå uden at man først lærer at forstå sproget, og kender de bogstaver, hvormed den er skrevet. Den er skrevet på matematikkens sprog, og dens bogstaver er trekanter, cirkler og andre geometriske figurer, foruden hvilke det er menneskeligt umuligt at forstå dens ord; foruden hvilke vi vandrer uhjælpsomt rundt i en mørk labyrint. (Galilei: ***Il Saggiatore*** her citeret fra Jacob Thygesen: ***Galileo Galilei og kontroversen om kometerne***)

Læg mærke til, at, Galilei henviser til et mindre hjørne af matematikken, nemlig geometrien. Det centrale i citatet er snarere, at Universet er facitlisten, ikke Biblen. Og Galilei opfattede næppe selv det heliocentriske verdensbillede som en model. For kernen i inkvisitionens sag mod Galilei var, hvor vidt det heliocentriske verdensbillede var sandheden eller blot en teori. Det sidste kunne Kirken leve med, men den havde patent på sandheden.

Hvor om alting er: matematikken havde indledt sit triumftog i fysikken her på jorden med foreløbig kulmination i Isaac Newtons ***Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*** fra 1687. Læg i øvrigt mærke til en vigtig forskel mellem fysikkens love og moderne ad hoc modellering: selv om Newton selv opfattede principperne som matematiske og ikke udtryk for de grundlæggende fysiske love, havde han fat i den tunge ende til forståelse af rum og tid, en forståelse som udkrystalliseredes i Albert Einsteins almene relativitetsteori..