Kompetencer i matematik, ét redskab til at tale om videnskabelighed i matematik

Af Jakob Holm

På konferencen om matematisk videnskabsteori, maj 2009, fremlagde fagkonsulent Bjørn Grøn følgende:

> ”*Fagene bærer i særlig grad* ***bestemte dele af deres læreplaner og deres teorier og metoder*** *med ind i AT. Det er i disse elementer fagenes videnskabelighed træder frem i mødet med andre fag. Hvilke dele? – Det må de enkelte fag overveje.*”

Dette skrift skal ses som et bud på ét redskab til at tale om matematik fagets videnskabelighed i AT-sammenhæng.

Videre på konferencen om matematisk videnskabsteori fremlagde fagkonsulent Bjørn Grøn følgende

> *”Indgår i de faglige mål for AT: … indsigt i elementær videnskabsteori*
>
> *Elementær videnskabsteori drejer sig om:*
>
> - *at kunne diskutere, hvad det vil sige at opnå indsigt*
> - *at kunne ”se fagene ovenfra”, dvs. forholde sig reflekteret til fagene og kunne diskutere og vurdere, hvad de valgte fag kan og ikke kan – generelt, i relation til sagen og i et samspil med hinanden*
> - *at kunne redegøre for pågældende fags genstandsfelt og dets særlige og karakteristiske metoder og teorier – uden nødvendigvis at gå ned i detaljerne, f.eks. i en litterær analyse eller et matematisk bevis.”*

Ifølge dette handler elementær videnskabsteori altså om ”hvad det vil sige at opnå indsigt”, ”at kunne se fagene ovenfra”og ”kunne redegøre for fags genstandsfelt og dets særlige og karakteristiske metoder og teorier”.

For faget matematik vil - i hvert tilfælde - de to sidste emner i en vis grad kunne belyses gennem en kompetencebeskrivelse af matematisk faglighed. Der er udgivet en rapport ”Kompetencer og Matematiklæring” i 2002, se http://pub.uvm.dk/2002/kom/helepubl.htm , hvor der i foromtalen til rapporten står

Rapporten præsenterer otte centrale matematiske kompetencer, som har gyldighed for matematikundervisning på samtlige uddannelsestrin:

- *Tankegangskompetence - at kunne udøve matematisk tankegang*
- *Problembehandlingskompetence - at kunne formulere og løse matematiske problemer*
- *Modelleringskompetence - at kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter*

- *Ræsonnementskompetence - at kunne ræsonnere matematisk*
- *Repræsentationskompetence - at kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold*
- *Symbol- og formalismekompetence - at kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme*
- *Kommunikationskompetence - at kunne kommunikere i, med og om matematik*
- *Hjælpemiddelkompetence - at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed, herunder it.*

Desuden udpeges tre former for overblik og dømmekraft vedrørende matematik:

- *Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder*
- *Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning*
- *Matematikkens karakter som fagområde.*

For en nærmere uddybning af disse emner, så se den omtalte rapport " Kompetencer og Matematiklæring".

Buddet på redskabet til at tale om matematik fagets videnskabelig i AT-sammenhæng er at benytte definitionen af disse kompetencer som en måde at tale om fagets metoder og teorier.

Følgende vil jeg starte med at undersøge, hvordan bekendtgørelsen for stx Mat A forholder sig til disse kompetencer. Det vil jeg gøre ved at gribe fat på bekendtgørelsens enkelte faglige mål og rubricerer disse under de nævnte otte kompetencer og de tre former for overblik og dømmekraft.

Derefter vil jeg illustrere hvordan kompetencer kan benyttes i AT-sammenhæng. Jeg vil i en konkret case, vise hvordan de enkelte kompetencer kommer i spil.

Stx Mat A-bekendtgørelsen i kompetencelys

Som annonceret vil jeg gruppere bekendtgørelsens faglige mål efter de otte kompetencer og de tre former for overblik og dømmekraft.

Kompetencer, overblik og dømmekraft	Faglige mål i stx Mat A
Tankegangskompetencen	Kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes
Problembehandlingskompetencen	Selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold Løse geometriske problemer på grundlag af trekantsberegninger Foretage simuleringer og fremskrivninger i forbindelse med arbejde med modeller

	Ud fra en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål
Modelleringskompetencen	Anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder Kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes Anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder Kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger Opstille geometriske modeller
Ræsonnementkompetencen	Denne kompetence er med i de fleste faglige mål, da kompetencen består i at følge et matematisk ræsonnement og i at udtænke og gennemføre ræsonnementer. Ræsonnementskompetencen er intimt forbundet med både problembehandlings- og modellingskompetencerne da den udgør så at sige disses ”juridiske” side. Men et eksplicit emne fra de faglige mål er: Redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori
Repræsentationskompetencen	Anvende forskellige fortolkninger af stamfunktion
Symbol- og formalismekompetencen	Håndtere formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog Selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold Foretage simuleringer og fremskrivninger i forbindelse med arbejde med modeller Forskellige metoder til løsning af differentialligninger Kunne give en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer
Kommunikationskompetencen	Ved arbejde med modeller at være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog Redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori
Hjælpemiddelskompetencen	Anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer Foretage simuleringer og fremskrivninger i forbindelse med arbejde med modeller

Matematikkens anvendelse i andre fag	Demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling
Matematikkens historiske udvikling	Demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling
Matematikkens karakter som fagområde	

Det følgende skrift er en fortsættelse af skriftet

"Kompetencer i matematik, ét redskab til at tale om videnskabelighed i matematik"

og giver eksempler på anvendelse af matematikkompetencer i artiklen ”Indtagelse af rusmidler og kørsel med automobil”. I sidste halvdel af skriftet er det op til læseren at afgøre hvilke kompetencer, der er anvendt i artiklen.

Det er opbygget således at, på hver anden side er der kommentarer til de oprindelige sider. Kommentarerne er en angivelse af hvilke matematikkompetencer der anvendt.

Ved læsning på computerskærm anbefales at benytte "tosidet visning".

Kompetencer i matematik, et eksempel

Af Jakob Holm

Indtagelse af rusmidler og kørsel med automobil.

Færdselsloven stiller krav til føreren af automobil. Nogle af disse krav angår vores påvirkning af alkohol, rusmidler og medicin. Jeg vil se på hvordan overholdelsen af disse krav harmonerer med indtagelse af disse stoffer. Lad mig starte med at se på færdselsloven.

Fra *færdselsloven, jf. lovbekendtgørelse nr. 1079 af 14. november 2005, med de ændringer, der følger af lov nr. 303 af 19. april 2006, § 21 i lov nr. 309 af 19. april 2006, § 9 i lov nr. 538 af 8. juni 2006 og lov nr. 543 af 8. juni 2006:*

§ 53. For spirituskørsel straffes den, som fører eller forsøger at føre et motordrevet køretøj efter at have indtaget spiritus i et sådant omfang, at **alkoholkoncentrationen** i blodet under eller efter kørslen overstiger **0,50 promille**.

Stk. 2. For spirituskørsel straffes endvidere den, som fører eller forsøger at føre et motordrevet køretøj efter at have indtaget spiritus i et sådant omfang, at den pågældende ikke kan føre køretøjet på betryggende måde.

Sygdom, spirituspåvirkning m.v.

§ 54. Et motordrevet køretøj **må ikke føres** eller forsøges ført af nogen, som på grund af sygdom, svækkelse, overanstrengelse, mangel på søvn, **påvirkning af opstemmende eller bedøvende midler** eller af lignende årsager befinder sig i en sådan tilstand, at han er ude af stand til at føre køretøjet på fuldt betryggende måde.

Kontrol m.v.

§ 55. Politiet kan til enhver tid kræve, at føreren af et køretøj eller en rytter foretager udåndingsprøve.

Stk. 2. Politiet kan fremstille en person til **udtagelse af blod**- og urinprøve, hvis der er grund til at antage, at han har overtrådt § 53 eller § 54, stk. 1 eller 2, eller han nægter eller ikke er i stand til at medvirke til en udåndingsprøve. Angår mistanken andre forhold end spirituspåvirkning, kan politiet tillige fremstille den pågældende til undersøgelse af en læge. Det samme gælder ved mistanke om spirituspåvirkning, når særlige omstændigheder taler derfor.

I disse paragraffer er der, som fører af motordrevent køretøj, nogle helt konkrete krav angående indtagelse af alkohol, mens kravene til andre rusmidler og medicin ikke er helt så konkrete. Det der er væsentlig i forhold til kørsel, er at rusmidlet/medicinen, der er indtaget, skal være standset med enten at virke opstemmende, bedøvende eller at give andre påvirkninger til usikker kørsel. Det kan ske ved enten af stoffet fjernes fra kroppen eller at det neutraliseres.

I [Rusmidlernes biologi] skrives følgende: ”Rusmidlernes metabolisering (nedbrydning) finder sted i leveren. Der er principielt to forskellige måder, hvorpå stofferne nedbrydes eller inaktiveres. Den ene metode går ud på at ændre rusmidlets molekylære opbygning, så det ikke længere kan binde sig til en receptor (i hjernen, red). Den anden metode går ud på at koble et andet molekyle på rusmidlet, så det bliver mere vandopløseligt. Hermed kan stoffet udskilles med urinen. Denne proces kaldes en konjugering, og det molekyle, der typisk bruges, er *glucuronidsyre* (som sulfat- eller acetatsalt) (fig. 2.7.). Begge processer foregår inde i levercellernes cytoplasma. Det siger derfor sig selv, at jo lettere et rusmiddel trænger ind i levercellerne, og jo højere koncentration, der er i plasmaet, des mere nedbrydes pr. tidsenhed.”

Kompetencekommentarer til side 78

Her i denne boks anvendes modelleringskompetencen. Det ses bl.a. ved anvendelse af ordene "konkret" og "indskrænke". Desuden antages, at der hurtigt drikkes 5 alm. øl.

Her er en form for modeldiskussion, altså en stillingtagen til om modellen er brugbar eller om den skærer for mange og relevante hjørner af.

Det kan diskuteres, hvilken kompetence, der her er i sving. For at det kan være Problembehandlingskompetencen, skal der være et egentligt problem. Det er vel for meget at påstå, at det er et problem, at bestemme "hvor meget alkohol, der faktisk er i disse 5 øl". Hvis det faktisk opfattes som et problem, så er det Problemløsningskompetencen, der benyttes ellers er det er en opgave løst v.hj.a. rutineoperationer og her kommer Symbol- og formalismekompetencen i brug.

Det at udføre denne "rutineoperation", kan siges at falde ind under Ræsonnementskompetencen, da her godtgøres for et regneresultat. Det er dog ikke tilfældet, da der stilles krav til Ræsonnementskompetencen om opfindsomhed, analyseevne eller overblik. Det er jo ikke aktuelt her. Derimod er det igen Symbol- og formalisemkompetencen der sluttelig benyttes.

Tager modellen op til overvejelse, måske er den for simpel. Modelleringskompetencen.

Symbol- og formalismekompetence. Her foregår en oversættelse fra almindeligt sprog til matematikkens sprog ("f være funktionen", "x kilo")

Indtagelse og nedbrydelse af alkohol

Lad mig nu være konkret ved at se på indtagelsen af alkohol. Der er flere forskellige typer af alkohol, vi som danskere indtager: øl, vin, breezer, stærk spiritus, for at nævne de gængse. Disse typer af alkoholiske drikke indeholder forskellige procenter af alkohol. Alm. øl har en alkohol procent på 4.6%, vin fra 11 – 15 %, breezer indeholder typisk 4% alkohol, mens stærk spiritus fås i meget forskellige procenter, fra 20% til 80%.

Jeg vil indskrænke mig til udelukkende at se på konsekvenser af at drikke øl i forhold til bilkørsel. Nogle tilsvarende beregninger kan udføres for vin- eller spiritusdrikkere.

Case: **En person drikker hurtigt efter hinanden 5 almindelige øl.**

Hvad betyder det, og hvor realistisk er det, at man indtager 5 almindelige øl hurtigt efter hinanden?

Hensigten med denne lidt hypotetiske situation er, at personen indtager alkohol svarende til alkoholen i 5 almindelige øl, uden at der er udskilt eller nedbrudt noget af betydning af alkoholen. Det kræver også en god "sund" tørst for hurtigt at drikke 5 øl. "Hurtigt" dækker her over den tid, der går fra at man starter med at drikke øl, indtil der er nedbrudt en nævneværdig mængde alkohol i leveren.

Det første jeg vil gøre mig klart er, hvor meget alkohol der faktisk er i disse 5 øl. I en øl er der 4.6% af 33 cl rent alkohol og da 1cm^3 alkohol vejer 0.7873 g vil der i 5 øl være

$$5 \cdot 0.046 \cdot 0.33 \cdot 0.7873 \cdot 1000 \; gram = 59.76 \; gram$$

Hvad giver det så af promille i blodet? Den promille man taler om i forbindelse med bilkørsel er antal gram alkohol pr. liter kropsvæske. I [Rusmidlernes biologi] nævnes "Alkohol fordeler sig i kroppens vand. Dette udgør ca. 60% af legemesvægten hos mænd og ca. 55% hos kvinder". Jeg antager, at personen er en mand på 70 kg.

Så må det give

$$59.76\text{g}/(0.60 \cdot 70\text{kg})‰ = 1.42‰$$

Øvelse 1: Beregn *din* alkoholpromille ved hurtig indtagelse af de 5 øl.
Beregn derefter *din* alkoholpromille ved hurtig indtagelse af en halv flaske rødvin, 14% alkohol. En flaske rødvin indeholder 0.75 liter.

Nu er mænd jo forskellige, alle vejer ikke 70 kg. Lad mig beskrive sammenhængen mellem vægt og promille for mænd, der lige har indtaget 5 øl.

Lad variablen x stå for antal kilo en mand vejer og lad f være funktionen, der angiver promillen for en mand på x kilo ved indtagelse af 5 øl.

Kompetencekommentarer til side 80

Anvendelse af Symbol- og formalismekompetence, da der sker en form for oversættelse fra almindeligt sprog til en regneforskrift.

Repræsentationskompetencen er i brug, da funktionen f er udtrykt på to forskellige måder, nemlig ved en regneforskrift og ved en graf.

Her annonceres et problem: "Hvor meget alkohol manden på 70 kg har tilbage ...." Det er v.hj.a. problembehandlingskomptencen at dette problem er blive opstillet.

Oplysningen om ændringen af alkohol i kroppen konstant er 8 gram pr. time, er sandsynligvis ikke en fuldstændig korrekt oplysning. Set fra dette perspektiv har Modelleringskompetencen været anvendt for at fremskaffe denne tilskårede oplysning. Men nu står her altså, at ændringen konstant er 8 gram pr. time. Og så anvendes Problemløsningskompetencen til at løse problemet med, nemlig ved at opstille differentialligningen og bestemme den partikulære løsning.

Korrektheden i bestemmelsen af den partikulære løsning er gjort v.hj.a. Symbol- og formalismekompetencen (selve symbolmanipulationen).

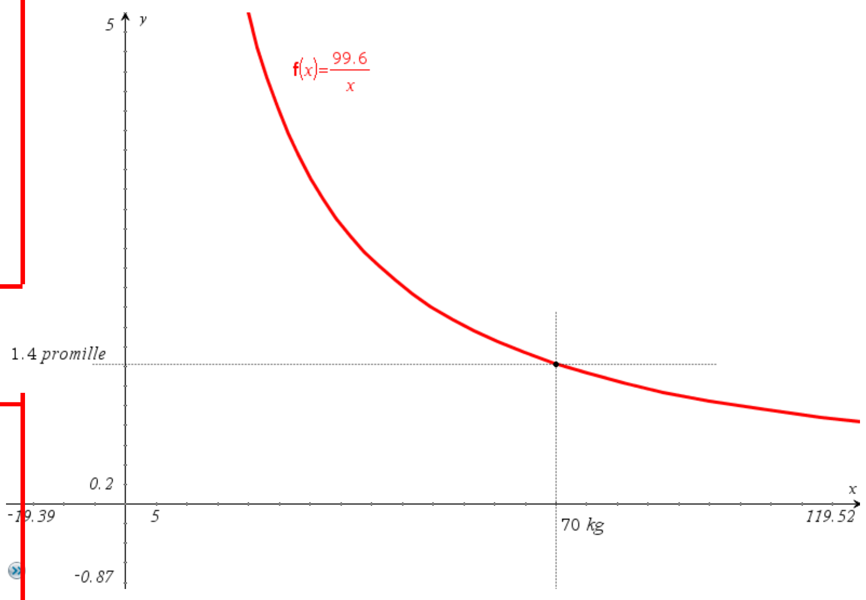
De 59.76 g alkohol udgør følgende promille af de x·0.60 l væske en mand indeholder

59.76g/(0.60·x)‰ = 99.6/x

så derfor har f regneforskriften

$$f(x) = \frac{99.6}{x}, \; for \; x > 0 \, .$$

Det grafiske billede af funktionen ses her, sammen med resultatet fra før med en 70 kg tung mand:



Da der sandsynligvis er en ligefrem proportional sammenhæng mellem mængde vand og mængde blod i en menneskekrop, vil en alkoholpromille være et udtryk for mængden af alkohol i blodet.

Nedbrydning af alkohol

Nu kommer alkoholen jo ud af kroppen igen ved nedbrydning i leveren. I [Rusmidlernes biologi, s.43] nævnes "Undtagelsen er alkohol, der metaboliseres ligefrem proportional, altså samme mængde pr. tidsenhed. … Dette svarer til 8 gram ren alkohol pr. time"

Jeg vil undersøge, hvor meget alkohol manden på 70 kg har tilbage t timer efter indtagelsen af de 5 øl uden yderligere indtagelse.

Da der her oplyses ændringen af alkohol i kroppen er konstant 8 gram pr. time kan man opstille følgende differentialligning:

$$y' = k = -8$$

hvor y angiver mængden af antal gram tilbage i blodet til tid t. Løsningen til ligningen er jo

$$y = g(t) = k \cdot t + b = -8 \cdot t + b.$$

I vores situation har vi startbetingelsen, at der er indtaget de 5 øl, hvilket gav de 59.67 g rent alkohol, så $g(0) = 59.67$.

$$g(0) = -8 \cdot 0 + b = 59.67 \Leftrightarrow b = 59.67 \quad \text{og dermed } g(t) = -8 \cdot t + 59.67 \text{ for } t \geq 0.$$

Kompetencekommentarer til side 82

Hvilke t-værdier gør at g er nul?" er et spørgsmål dannet v.hj.a. Tankegangskompetencen. Det er væsentligt for anvendelse af Tankegangskompetencen, at det er et anliggende af egentlig matematisk art.

Oversættelse af tallet 7.46 til sætningen "så der går ca. de 7.5 time" involverer igen Symbol- og formalismekompetencen.

Øvelse 2: Forhold dig til, om det er rigtigt at alkohol nedbrydes lineært over tid og om nedbrydningen kunne tænkes at afhænge af andre faktore/variable end af tiden.

Du kan lade følgende udsagn, det første fra Katrine Egelund Pedersen, Molekylærbiolog, Ph.d., og det andet fra Politiken, indgå i dine overvejelser.

"Enzymers reaktion med deres substrat er oftest afhængig af substrat-koncentrationen, således at reaktionshastigheden stiger med denne til et maksimum, hvor alle enzymer er mættede med substrat. Det vil altså sige at selve mødet/bindingen mellem enzym og substrat er hæmmende for reaktionshastigheden.

I tilfældet, hvor nedbrydningen er lineær må mødet/bindingen mellem enzym og substrat ikke være den begrænsende faktor, men derimod nok tiden for omdannelsen af substratet i enzymet, som vil være konstant.

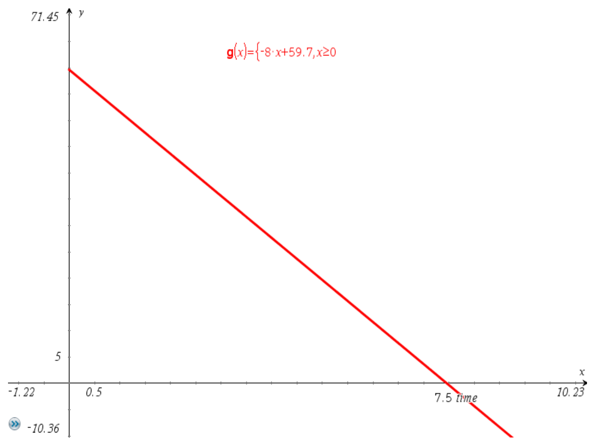
Denne situation kan forekomme fx når der enten er voldsomt overskud af substrat i forhold til enzym, eller når enzymets affinitet for substratet er voldsomt høj, så deres initielle møde ikke begrænser reaktionen."

Betydningen af ordet "affinitet" er ifølge [DenStoreDanske] "inden for kemi to stoffers tilbøjelighed til at reagere med hinanden" og betydningen af ordet "substrat" er "stof, hvis kemiske opbygning ændres af et enzym".

[Politiken]: "Rigmor Zobel Ravn blev idømt en bøde på 20.000 kroner for at have købt 6 gram kokain til eget forbrug"

Øvelse 3: I **øvelse 2** er der et udsagn som skulle stamme fra en ekspert indenfor feltet molekylærbiologi. Er det videnskabsteoretisk i orden at inddrage et sådan udokumenteret udsagn?

Funktionen g er jo en lineær funktion og dens graf er tegnet til højre:



Det ses, at alkoholen vil være ude af kroppen på den 70 kg. tunge mand efter ca. 7.5 time.

Dette kan også udregnes ved at bestemme de t-værdier, som løser ligningen

$$g(t) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-8 \cdot t + 59.67 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-59.67}{-8} = 7.46$$

så der går ca. de 7.5 time.

Kompetencekommentarer til side 84

Beskrivelsen af sammenhængen mellem promille og tid er det aktuelle problem. Så det at opstille dette problem er gjort ved brug af Problembehandlingskompetencen.

Denne formalisering af de fysiske forhold sker ved betjening af symboler, så her benyttes Symbol- og formalismekompetencen.

Dette er jo en bestemmelse af nogle konstanter, ud fra en definition og en formel. Så her benyttes Symbol- og formalismekompetencen. Dog er der en simpel brug af Ræsonnementskompetencen til at gøre det let at bestemme sammenhængen mellem promille og tid. Nemlig den, at vide, at det er en lineær sammenhæng og derfor at det kun er nødvendigt at bestemme to konstanter.

"Hvilken t-værdi gør h50 til at være lig med 0.5?" kunne spørgsmålet have lydt i denne situation. Betragtet på denne måde er det Tankegangskompetencen der er anvendt. Men mere realistisk set er det Symbol- og formalismekompetencen, der anvendes til at oversætte fra problemstilling til ligning.

Øvelse 4: Bestem ud fra de ovenstående oplysninger, hvor lang tid der går, før *du* efter den hurtige indtagelse af den halve flaske rødvin i **øvelse 1** igen er ædru.

Det er nu relevant at få beskrevet sammenhængen mellem promille og tid. Promillegrænsen for bilkørsel her i Danmark er 0.5‰ som angivet i færdselsloven. Igen ser jeg på situationen for mænd, der hurtigt har drukket 5 øl.

Jeg indfører

t: antal timer efter de 5 øl er drukket

h_{70}: funktionen der angiver promillen efter t timer hos mænd med vægt 70 kg, der hurtigt har drukket 5 øl.

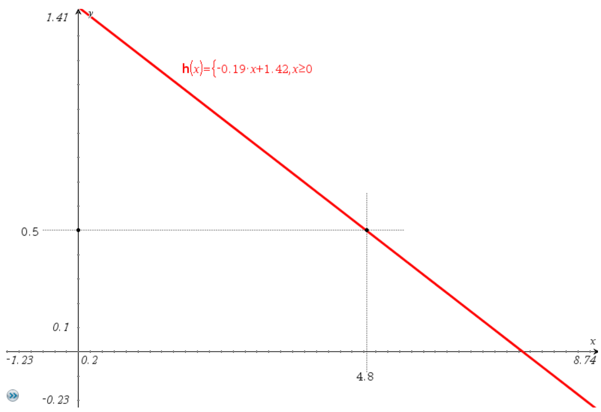
Da vi ved, at h er en lineær funktion, er det udelukkende konstanterne a og b i regneforskriften $h_{70}(x) = a \cdot t + b$ der skal bestemmes:

$b = 1.42$ som jo er start promillen

$$a = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{-8/(0.60 \cdot 70)}{1} = -0.190, \text{ så}$$

$$h_{70}(t) = -0.190 \cdot t + 1.42 \quad \text{for } t \geq 0$$

Det grafiske billede af h_{70} ses til venstre, hvor det samtidigt er muligt at aflæse, at det tager ca. 4.8 time, inden det igen er tilladt at føre bil.



Nu kan man så spørge "Jeg vejer kun 50 kg, så hvor langt tid går der før jeg må køre bil?"

I denne situation gælder, at til tid nul opnås den maksimale promille, som er $f(50)$, og derfor må h's regneforskrift ændres til

$$h_{50}(t) = -0.190 \cdot t + f(50)$$

og spørgsmålet besvares ved at løse ligningen

$$\boxed{h_{50}(t) = 0.5} \Leftrightarrow -0.190 \cdot t + \frac{99.6}{50} = 0.5 \Leftrightarrow t = (0.5 - \frac{99.6}{50})/-0.190 = 7.9.$$

Du, som vejer 50 kg, må køre bil igen efter ca. 7.9 time.

Kompetencekommentarer til side 86

Der fås nye og bedre informationer om virkeligheden. Det skal der så tages højde for i den model der benyttes. Det er Modelleringskompetencen der anvendes.

Der er usikkerhed om hvad der virkelig gælder i den fysiske verden. Dette giver anledning til at træffe en model-beslutning. Så igen har Modelleringskompetencen været anvendt.

Her er vi ovre i model-verdenen, uden at forholde sig til den fysiske verden. For at beskrive sammenhængen mellem vægt og forbrændingstid træffes en beslutning, så denne beslutning må være truffet v.hj.a. Problembehandlingskompetencen.

Her gives et argument for at der ikke er en 100% lineær sammenhæng. Det sker ved benyttelse af Ræsonnementskompetencen.

Øvelse 5: Bestem hvor lang tid der går, før du igen må køre bil/har en promille under 0.5‰, efter den hurtige indtagelse af den halve flaske rødvin i **øvelse 1**.

Forbedring af modellen

Det er ikke korrekt, at man nedbryder 8 g alkohol, uafhængigt af hvem man er. I [Sundhedsstyrelsen publikation om alkohol] oplyses følgende sammenhæng mellem en persons vægt og tiden for at nedbryde en genstand. Begrebet en genstand er defineret som en alkoholisk drik med 12 g alkohol. Som det ses, er der stor variation i tiden for nedbrydningen.

Vægt	Minimum tid	Maksimum tid
60	1.33	2.00
70	1.15	1.72
80	1.00	1.50
90	0.88	1.33
100	0.67	1.20

Tabel 1: Så lang tid er du om at nedbryde en genstand, måling i kilo og timer.

Umiddelbart foreligger der ingen oplysning om, hvordan fordelingerne er i for de enkelte vægtklasser, ligesom der ikke er oplysninger om hvor mange målinger, der er foretaget. Jeg antager, at målingerne ikke giver anledning til at forkaste, at de stammer fra en jævnt fordelt stokastisk

variabel. Derfor vil jeg tillade mig at benytte midtpunkterne i tids-intervallerne, som et udtryk for en værdi, der præsenterer nedbrydningstiden for en genstand for en person med den tilhørende vægt.

Vægt	Nedbrydningstid
60	1.67
70	1.44
80	1.25
90	1.11
100	0.94

Tabel 2: Nedbrydningstid som intervalmidtpunkt

Jeg vil give en matematisk beskrivelse af sammenhængen mellem vægt og forbrændingstid.

Umiddelbart ses, at der ikke er en 100% lineær sammenhæng, da der til ens Δt-værdier ikke er ens Δy-værdier.

Øvelse 6: Forklar i detaljer, hvorfor der ikke er en 100% lineær sammenhæng mellem vægt og nedbrydningstid.

Kompetencekommentarer til side 88

Hvis disse regressioner udføres v.hj.a. regnemaskine eller computerprogram, så har Hjælpemiddelskompetencen være benyttet.

Øvelse

Efter denne gennemgang af benyttede matematikkompetencer i de første fem sider, er det nu din tur. Afklar hvilke kompetencer der benyttes i indholdet af de næste sider tekst. Du kan, evt. ved brug af en kompetence, gøre klart

- Hvad der er for en egenskab ved kompetencen der er i spil
- Hvordan det udmønter sig her i teksten
- Evt. hvorfor det ikke er en nabo-kompetence, der burde anføres.

Jeg vil forsøge mig frem med forskellige modeller til beskrivelse af dataene, modeller bestemt ved regression.

Regressionstype	Forklaringsgrad, R^2
Lineær regression	0.9917
Andengradsregression	0.9981
Potensregression	0.9915
Eksponentiel regression	0.9979

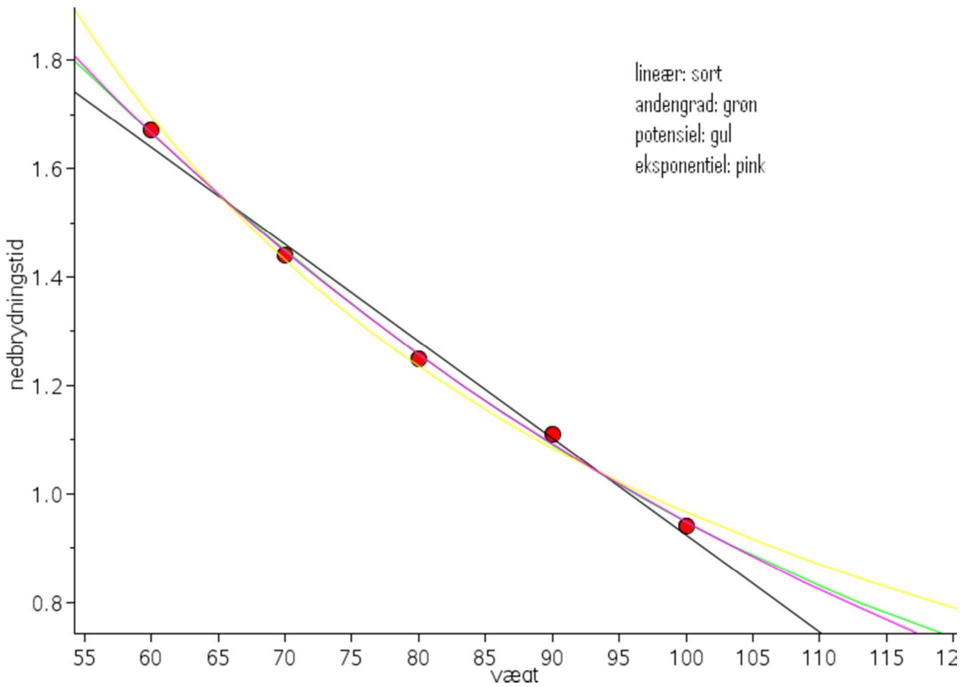
Tabel 3: forklaringsgrader

Forklaringsgraden R^2 til de enkelte regressioner er udtryk for hvor mange procent den enkelte model (den lineære, den kvadratiske, den potensielle og den eksponentielle) giver mindre i variation end en helt ”tilfældig” model, se [Tænk med en graf] for nærmere forklaring.

Øvelse 7: Check om den eksponentielle models forklaringsgrad virkelig er 0.9979.

Da almindeligvis en model regnes for acceptabel, når R^2 er over 0.95, og glimrende, når R^2 er over 0.99, må vi her konstatere, at alle de afprøvede modeller er glimrende til at beskrive dataene, men evt. se [Tænk med en graf].

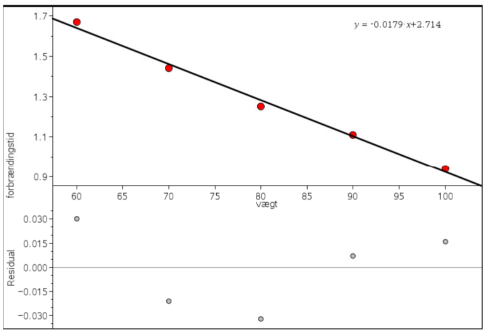
For at lave en grafisk kontrol tegner jeg de grafiske billeder af disse regressionerne op sammen med dataene.



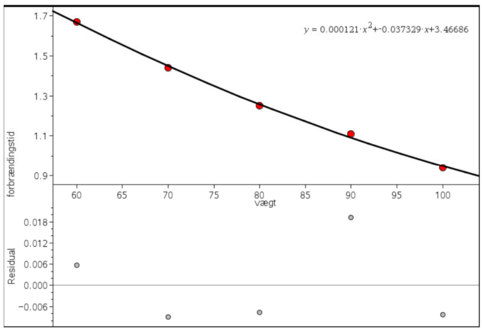
Der er ikke nogle af punkterne, som afviger radikalt fra regressionskurverne. Umiddelbart ser der ud til at være en tendens til at dataene skal modelleres med en model der beskriver en krumning.

Kompetencekommentarer til side 90

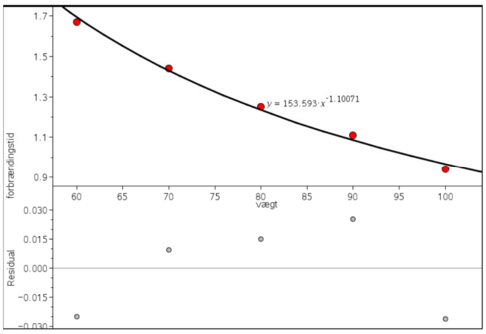
Øvelse 8: Hvad er formålet med at lave en grafisk kontrol af modellerne?



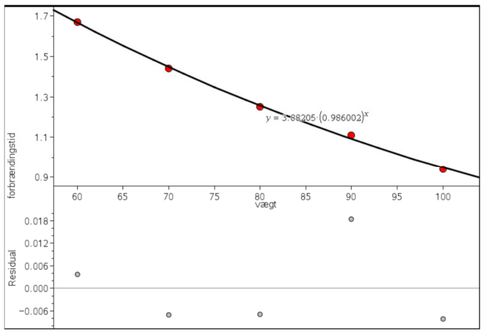
Den lineære regression og dens residualer



Den kvadratiske regression og dens residualer



Potensiel regression og dens residualer



Eksponentiel regression og dens residualer

Udfra de enkelte modellers residualer (afvigelse mellem data og beregnede data) kan jeg se, at der for den lineære og den potensielle model er en krumningstendens, mens for den kvadratiske og den eksponentielle er et mere tilfældigt billede. Det tyder altså på, at der ikke er en systematisk afvigelse ved andengrads- og eksponentielmodellen.

Øvelse 9: Det lyder til, at der er et problem, når en models residualer har et systematisk forløb. Hvad kan det bestå i?

Da forklaringsgraden, R^2, både for andengrads- og eksponentiel-modellen er tæt på én samt at disse to tal adskiller sig meget lidt fra hinanden, gør at jeg på anden vis vil forsøge at afgøre hvilken model, jeg skal vælge. Jeg ser på modellernes afvigelser fra de faktiske data.

Kompetencekommentarer til side 92

	A vægt	B forbrændingstid	C kvadratisk	D eksponentiel	E kvadsum_afv_f10	F kvadsum_afv_f11
◆			=f10(vægt)	=f11(vægt)		
1	60	1.67	1.66429	1.66622	0.000606	0.000516
2	70	1.44	1.44886	1.44714		
3	80	1.25	1.25771	1.25686		
4	90	1.11	1.09086	1.09161		
5	100	0.94	0.948286	0.948079		
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						

E1 =sum((forbrændingstid−kvadratisk)^2)

Tabel over data, værdier ved regression og kvadratsum afvigelser

Her kan jeg se, at den eksponentielle regression bedst beskriver dataene. For alle vægtene er den eksponentielle beskrivelse tættere på de oprindelige data end andengrads-beskrivelsen er. Dette mønster ses også i kvadratsums afvigelserne, hvor afvigelsen for den eksponentielle model er den mindste.

Øvelse 10: Hvad forstås ved kvadratsums afvigelserne og hvorfor er de relevante at betragte?

Derfor benytter jeg den eksponentielle model til at beskrive dataene:

$$f(x) = 3.88 \cdot 0.98600^x, \quad \text{for } x \in [60;100],$$

hvor f angiver tiden i timer for at nedbryde alkoholen i en genstand og x angiver vægten af personen, der har indtaget genstanden.

Lad os nu se, hvad en 70 kg tung mand kan forbrænde på en time. Han tager $f(70)$ timer for at forbrænde en genstand og en genstand indeholder 12 g alkohol, dvs. at han på en time forbrænder $12/f(70)$ gram = 8.29 gram, altså lidt mere end tommelfingerreglen på de 8 gram.

Større mennesker har sandsynligvis en større lever end mennesker af mindre størrelse. Dette argument giver god grund til at tro, at denne beskrivelse givet ved funktionen f, der jo afhænger af variablen x (vægt), er en bedre beskrivelse end den forrige beskrivelse. Den forrige beskrivelse angav jo bare at man, uafhængigt af vægt, nedbrød 8 gram alkohol pr. time.

Nu kommer det dog sandsynligvis an på hvad man er blev stor af. Jeg tror, at hvis man er blevet stor pga. et godt fedtlag eller har trænet sig til store muskler, så er ens lever ikke vokset tilsvarende. Dette er nok en af årsagerne til de bredde intervaller i tabel 1, f.eks. at vægten 60 kg, giver en nedbrydningstid på 1.33 – 2.00 time.

Kompetencekommentarer til side 94

Funktionen f er ikke på nogen måde perfekt til beskrivelsen af nedbrydningstiden, da nedbrydningstiden må afhænge af yderligere faktorer udover vægten. Derfor kan f ikke være andet end en ny og bedre tommelfingerregel til beskrivelse af tiden til nedbrydningen af en genstand.

Øvelse 11: Ved brug af denne model, hvor lang tid går der, inden *du* har en promille på 0.5‰ efter indtagelse af den halve flaske vin i **øvelse 1**?

Indtagelse og nedbrydelse af andre rusmidler end alkohol

Som vi hørte i [Rusmidlernes biologi] afhænger nedbrydningen af rusmidlet af dets koncentrationen i blodet, som jo er ligefrem proportionalt med den mængde der er indtaget (antaget forgået i løbet af et kort tidsrum). Nedbrydelsen af rusmidler foregår ved enzym binding og som indikeret i **øvelse 1**, så foregår nedbrydelsen oftest ligefrem proportionalt med koncentrationen af rusmidlet.

Det har desuden ved målinger vist sig, at for alle rusmidler (undtaget alkohol) kan sammenhængen mellem mængden af rusmiddel i kroppen og størrelsen af nedbrydelsen altså ændringen i mængden beskrives ved en ligefrem proportionalitet. Matematisk kan det udtrykkes

$$y' = k \cdot y$$

hvor $y(t)$ angiver mængden af rusmidlet i kroppen til tid t og hvor k er en negativ konstant. Løsningen til denne differentialligning er

$$y(t) = c \cdot e^{k \cdot t}$$

hvor c er en konstant. Så nedbrydningen af rusmidler foregår mængdemæssigt eksponentielt i forhold til tid. Angående indtagelse og nedbrydning gælder der de samme overordnede forhold ved medicin som ved disse andre rusmidler.

Øvelse 12: Check at $y(t)$ er løsning til differentialligningen.

Ændring af færdselsloven

Der er mange forskellige rusmidler. Her skal bare nævnes nogle få: hash, heroin, kokain, fantasy. Disse stoffer nedbrydes med forskellige hastigheder og da stofferne har forskellige virkninger indtages de i meget forskellige mængder.
Ifølge færdselsloven må man ikke være påvirket af rusmidler så ”at man er ude af stand til at føre køretøjet på fuldt betryggende måde”. I 2007 kom der er ændring til færdselsloven med en såkaldt ”nul-grænse”. Nul-grænsen betyder, at det er strafbart at køre bil med bare den mindste smule af ulovligt stof i blodet, altså en grænse på nul milligram. Når stof nu nedbrydes eksponentiel i leveren, vil man teoretisk set aldrig blive helt af med rusmidlet igen, da der ifølge modellen altid vil

Kompetencekommentarer til side 96

være noget tilbage i kroppen. Det kan selvfølgelig ikke være hensigten med nul-grænsen, at de personer som først én gang har fået rusmiddel i kroppen aldrig mere kan komme til at føre et køretøj.

Øvelse 13: Hvorfor vil der for altid ifølge modellen være rusmiddel tilbage i kroppen? Er modellen realistisk på dette punkt?

Uden at jeg skal gøre mig klog på det, vil jeg mene, at de målemetoder man anvender, altid vil have en fejlmargin. Så når man tager højde for fejlmarginen, vil der være en nedre måle-grænse, neden for hvilken man ikke kan garantere, at den sande værdi ikke er nul gram stof i kroppen.

Øvelse 14: Kan man som opgaveskriver, tillade sig ikke at have konkret information om et emne og alligevel lade det indgå i beskrivelsen?

Her vil jeg kun betragte rusmidlet hash. I hash er det stoffet THC, som giver rusen. THC nedbrydes med en halveringstid på 2 til 5 døgn i leveren.

Case: **En person optager 25 mg THC i blodet ved hashrygning.**

Fra [Rusmidlernes biologi]: ”Ryger en person, for at opnå maksimal ruspåvirkning, 1 g hash indeholdende 5% THC, er der 50 mg THC til rådighed. Ved rygning optages kun halvdelen, altså 25 mg i blodet, resten ødelægges ved pyrolyse, udåndes eller bliver tilbage i piben. Når hjernen har optaget ca. 1% svarende til 0,25 mg, vil personen være maximalt ruspåvirket og derfor ophøre med stofindtagelsen”.

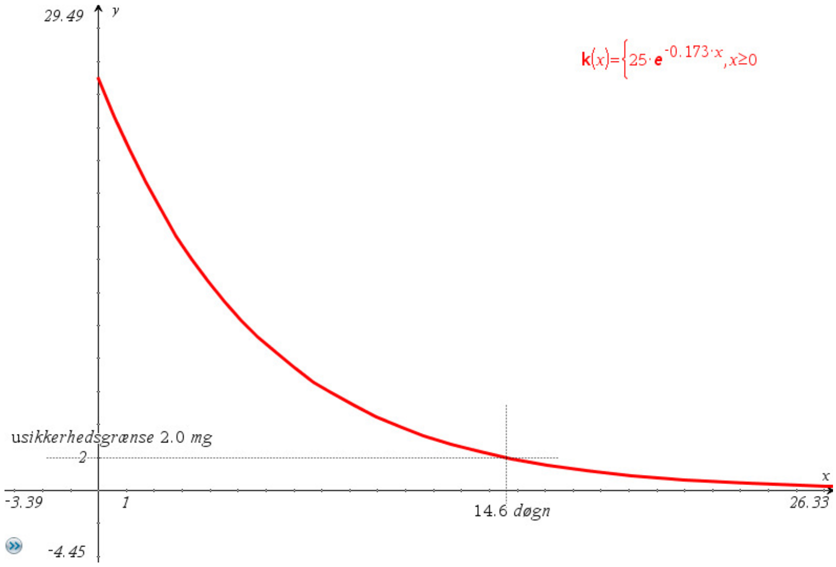
Lad mig i første omgang antage, at for en bestemt person har THC en halveringstid på 4 døgn. Desuden lad mig antage, at de målemetoder der benyttes i forhold til THC, ikke med sikkerhed kan give en måleværdi på under 2 mg i kroppen. Det sikre, at man ikke kan blive taget i ulovlig kørsel pga. indtagelse af hash, når man har under 2 mg THC tilbage i kroppen.
Det første jeg vil undersøge er, hvor lang tid der går, inden der er under 2 mg THC tilbage i kroppen. Først bestemmes funktionen, som beskriver mængden i milligram af tilbageværende THC i kroppen t timer efter indtagelse. Fra før vides, at der kan beskrives ved en aftagende eksponentiel funktion. Jeg ved, at $T_{½} = 4$ døgn og der gælder at $T_{½} = \log(½)/\log(e^k)$, hvor k er en konstant, der udtrykker den aktuelle nedbrydnings hastighed. Det er nu muligt at bestemme konstanten k ud fra denne ligning

$$T_{½} = \frac{\log(½)}{\log(e^k)} = \frac{\ln(½)}{\ln(e^k)} = \frac{\ln(½)}{k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln(½)}{T_{½}} = \text{-}0.17328$$

Kompetencekommentarer til side 98

Konstanten c skal også bestemmes. Den angiver mængden af stof i kroppen til tid nul. Da der er optaget 25 mg i kroppen, må $c = 25$. Så forskriften for funktionen er

$$k(t) = 25 \cdot e^{-0.17328*t}, \text{ for } t > 0.$$



Det grafiske billede af funktionen k ses til højre. Ud fra dette kan jeg se, at først efter 14 -15 døgn er det igen muligt at køre bil, uden at blive taget i ulovlig kørsel pga. hashrygning.

Jeg kunne selvfølgelig også have løst ligningen $k(t) = 2$:

$$25 \cdot e^{-0.17328 \cdot t} = 2 \Leftrightarrow e^{-0.17328 \cdot t} = \frac{2}{25} \Leftrightarrow -0.17328 \cdot t = \ln(2/25) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2/25)}{-0.17328} \cong 14.58 \text{ døgn.}$$

Det er umiddelbart lang tid, man ikke må køre bil, men den vurdering afhænger selvfølgelig af ens kørselsbehov.

Øvelse 15: Forstil dig, at der er blevet udviklet en ny og mere præcis målemetode med en usikkerhedsgrænse på kun 1 mg rusmiddel i kroppen. Hvor lang tid skal man undgå at køre bil, for ikke at blive taget i ulovlig kørsel?

Lad mig nu betragte de to ydre grænser for halveringskonstanten for nedbrydningstiden af THC, nemlig $T_{½} = 2$ døgn og $T_{½} = 5$ døgn. For disse vil jeg gerne angive den tilhørende tidsgrænse for kørsel.

Ved benyttelse af samme fremgangsmetode som for $T_{½} = 4$, fås følgende

$T_{½} = 2$	$T_{½} = 5$
$k = -0.346573$	$k = -0.138629$
$k(t) = 25e^{-0.346573t}$	$k(t) = 25e^{-0.138629t}$
Under 2 mg: 7.29 dage	Under 2 mg: 18.22 dage

Tabel 4: under 2 mg THC.

Kompetencekommentarer til side 100

Det ses, at der går fra 7 til 18 dage, før THC'en er ude af kroppen i tilstrækkelig grad, til at undgå at blive dømt på nulgrænsen. Da du sandsynligvis ikke kender din personlige halveringstid for nedbrydning af THC i din krop, er én løsning, altid at vente 18 dage fra indtagelse af 25 mg THC til du igen sætter dig bag rattet.

Fra [Rusmidlernes biologi]: "Når hash indtages ved rygning, passerer det aktive stof hurtigt fra den indåndede røg via lungerne over i blodet. I løbet af minutter stiger koncentrationen af THC i blodet til mellem 100 og 500 nanogram (ng) pr. ml blod. Da THC som nævnt er fedtopløseligt, kan det ikke i fri form blande sig med blodets vandfase. Det bindes derfor til nogle proteinstoffer i blodet, der er vandopløselige, og transporteres på denne måde rundt i organismen. Efter ca. 4 timer er koncentrationen af THC i blodet faldet til nogle få ng. pr. ml blod. Dette er ikke udtryk for en metabolisering af THC, men skyldes en deponering i kroppens fedtvæv og organer som hjerte, lunger, milt, brystkirtler og moderkage".
Da koncentrationen i blodet er faldet til et så lavt niveau, vil der ikke komme meget nyt THC til hjernen. Derfor vil man muligvis ikke vedblive med at være ruspåvirket i det antal dage som regnestykket viser, men ikke desto mindre er der altså mindst de 2 mg tilbage i kroppen i det angivne antal dage.

Konklusion

Nedbrydningsevnen af alkohol afhænger af personens vægt, tiden siden indtagelsen af alkoholen og andre personlige forhold. For den enkelte person er der en lineær sammenhæng mellem alkoholpromillen og tid siden indtagelsen af alkoholen. For at bestemme tiden indtil promillen igen er under 0.5‰, benyt som tommelfingerregel at følgende udtryk

$$(\text{antal genstande} - (0.5/1000 \cdot 0.60 \cdot x \cdot 1000)/12) \cdot f(x) = (\text{antal genstande} - 0.025 \cdot x) \cdot f(x)$$

angiver tiden målt i timer, inden alkoholpromillen er under 0.5‰, hvor f er funktionen fra afsnittet om den forbedrede model og hvor x angiver personens vægt i kilo.
Nedbrydningsevnen af andre rusmidler afhænger af tiden og andre personlige forhold. For den enkelte er der en eksponentiel sammenhæng mellem mængden af stof tilbage i kroppen og tiden der er gået siden indtagelsen af stoffet. Men der er store personlige forskelle på hvor hurtigt nedbrydelsen foregår, se tabel 4. Derfor, for at undgå at blive tage i ulovlig kørsel pga. rusmiddelindtagelse, vær klar over at det tager rigtigt lang tid, op til 20 dage, før niveauet af rusmiddel i kroppen er under en given måle-usikkerhedsgrænse.
En forskel på de klasser af rusmidler, alkohol og andet rusmiddel, er at der typisk går der væsentligt længere tid for nedbrydningen af disse andre rusmidler end der gør for alkohol. Nedbrydelse af alkohol regnes i timer, mens nedbrydelse af disse andre rusmidler typisk regnes i døgn.

Øvelse 16: Argumentér for korrektheden af udtrykket, der angiver antal timer inden alkoholpromillen igen er under 0.5‰.
Tegn grafer for faste antal genstande (3 genstande og 7 genstande), for hvor lang tid det tager inden alkoholpromillen er under de 0.5‰ og aflæs dine *egne* tidsgrænser for sikker kørsel.

Øvelse 17: Er der belæg for alle delene af konklusionen eller er der nogle som er for let købt?

Litteratur

[Rusmidlernes biologi] *Rusmidlernes biologi – om hjernen, sprut og stoffer* af Henrik Rindom

[Tænk med en graf] *Tænk med en graf* af Bjørn Felsager og Gert Schomacker

[Sundshedsstyrelsens publikation om alkohol] http://www.sst.dk/publ/Publ2006/CFF/Uge40/Faa_mere_at_vide_06.pdf

[DenStoreDanske] http://www.denstoredanske.dk

[Politiken] http://politiken.dk/indland/article905963.ece

Opgaver

1. Identificer abstraktioner i dette skrift og beskriv dem ved uformelt at angive startområde, slutområde og hvor i abstraktionen består – altså angive det informationstab den skaber. Beskriv på denne måde mindst 4 abstraktioner.
   Eksempel på en abstraktion.
   Lad mig give den et navn: *trekant.*
   Startområde: figurer der minder om ”en trekant”, altså noget med tre sider, måske det også har en lille fjerde side, hvor siderne har en tendens til at være rette linjestykker og muligvis også noget andet.
   Slutområde: mængden af punktmængder, der er indesluttet af tre rette linjestykker. Hvert linjestykke skal i hvert af dets endepunkter være sammenhængende med et af de andre to linjestykker.
   Abstraktionen: Fjerne alt overflødigt, så som at sider ikke er helt rette, så som en ekstra lille, lille side, så som at det indgår i en hel andet overordnet struktur.

2. Undersøg om abstraktionerne i opgave 1 kan give årsag til begrænsninger i konklusioner. Med andre ord, find om muligt, steder hvor abstraktionerne er for grove til at give en korrekt relevant beskrivelse af situationen den benyttes i.

3. Giv eksempler på at der i skriftet anvendes matematisk sprog til at formulere problemstillinger. Herunder kan du f.eks. anvise, hvor der benyttes symboler for variabelstørrelser, oversættelse frem og tilbage mellem naturligt sprog og symbolholdigt sprog og undersøge om der skjulte variable på spil i nogle sammenhænge.

4. Identificer fra dette skrift brug af den aksiomatiske-deduktive metode. Det behøver ikke at være strengt matematiske brug af den aksiomatiske-deduktive metode. F.eks.: ”Mit navn er Jakob (definition). Hvis du hedder det samme som mig, så har vi ens navne (aksiom). Du hedder det samme som mig. Derfor hedder du Jakob.”