Elementær videnskabsteori? There ain't no such thing

Af Jørgen Ebbesen

Det gennemgående spørgsmål i matematiks videnskabsteori er: "Hvad er matematik?"

Spørgsmålet viser sig langt sværere at svare på, end man umiddelbart skulle tro. Det lette svar: "Matematik er det, som matematikere beskæftiger sig med" er ikke så dumt og naivt, som det lyder, men udløser automatisk spørgsmålet: "Hvad er en matematiker så?"

Sagen er, at matematik er mange ting. I virkeligheden kan spørgsmålet slet ikke besvares, for svaret afhænger af den synsvinkel, man anlægger. Det er smadderirriterende, hvis man er opdraget inden for faget matematiks tradition, hvor de spørgsmål, vi stiller, har klare og entydige svar.

Matematik er en menneskelig aktivitet, eller rettere mange forskellige aktiviteter. Det er blandt andet et videnskabsfag med et hav af discipliner i rivende udvikling. Den tid er for længst overstået, hvor et enkelt menneske kunne sætte sig bare overfladisk ind i hele faget.

Matematik er en del af vores kulturarv. Historisk set har matematik og filosofi været tæt knyttet til hinanden. Forbindelsen er ikke længere så intim, som den har været, men filosoffer fra Platon over Déscartes til Bertrand Russel har betjent sig af matematik som inspiration og eksempel.

Matematik er en del af almindelige menneskers hverdag, en del af det sprog som vi beskriver og forstår verden med. Videnskabelige undersøgelser viser i øvrigt, at den matematik, almindelige mennesker betjener sig af, adskiller sig fra den, de lærte i skolen.

Matematik er også et undervisningsfag på mange niveauer. Matematik er fx et gymnasiefag, som beskrevet i læreplanen. Men læreplanen rummer ikke hele sandheden, for der findes en matematisk tradition, som ikke er styret af de kanoniske skrifter, men videreformidles i det kollegiale samvær i frikvarter, på kurser, til eksamen. Et typisk indslag ved censorfrokosten, hvor censor og eksaminator har følt sig frem til hinanden i løbet af de første eksaminationer, er en rysten på hovedet over de nyeste regler.

Det, at der er forskellige mulige angrebsvinkler, indebærer, at den vinkel, man vælger, automatisk afspejler, hvad man synes, at matematik bør være. Filosofisk er de to spørgsmål, hvad matematik ***er***, og hvad matematik ***bør*** være, principielt uafhængige, så vi er ude i noget snavs, men i praksis er spørgsmålene uadskillelige.

Når nu matematik er mange forskellige, men alligevel beslægtede fænomener, hvordan skal man så angribe spørgsmålet? Jeg vil med denne artikel argumentere for, at der er naturligt at anlægge et gymnasieperspektiv.

Et af de faglige mål i AT er ifølge læreplanen fra august 2010, at eleverne skal kunne

demonstrere indsigt i videnskabelig tankegang og gøre sig elementære videnskabsteoretiske overvejelser i forhold til den konkrete sag.

At ordet ***elementær*** benyttes i forbindelse med videnskabsteoretiske overvejelser kan umiddelbart virke ejendommeligt. Det er vist ikke nogen hemmelighed, at den videnskabsteoretiske side af AT for mange elever (og lærere) har virket påklistret og rituel. Vi tramper lidt rundt i den hermeneutiske cirkel, når vi har læst en tekst, og den hypotetisk-deduktive metode i de naturvidenskabelige fag, hvor teorier bekræftes eksperimentelt, men ingen viden er eviggyldig, fordi den pr. definition er falsificerbar. Og inden for samfundsvidenskab har vi kvantitative, kvalitative og komparative metoder. Til glæde for hvem?

Men der er et alternativ. Vi kunne i stedet for tage udgangspunkt i gymnasiefagene. Alene af den grund, at det er de fag, som eleverne kender. Jeg gør mig med andre ord til talsmand for, at vi skifter perspektiv og ser på noget, man kunne kalde ***gymnasiefagenes teori***. Eftersom udtrykket ***elementær videnskabsteori*** fra starten er indholdstomt, kan vi definere os ud af problemerne og vælge et indhold, som er meningsfyldt for de involverede lærere og elever. Det er godt nok at stramme den, for videnskabsteori er og bliver det ikke. Men taktikken ligger ikke så langt fra den noget pragmatiske udlægning af læreplanens ord, som de to AT-fagkonsulenter har gjort sig til talsmænd for.

Lad os for matematiks vedkommende lege lidt med tanken om, at vi har frit valg på alle hylder. Der er en håndfuld spørgsmål, der optager mig som lærer:

- Hvad er matematik?
- Hvad gør matematik til noget særligt?
- Hvad skal eleverne lære i matematik og hvorfor?
- Hvad vil det sige at være god til matematik?
- Hvordan lærer man matematik, og hvorfor er det så svært?

Disse spørgsmål burde for mig at se være de centrale i gymnasiefagets teori. Læg mærke til, at de to første spørgsmål er videnskabsteoretiske, men at svarene må forholde sig til gymnasiefaget, hvis det skal give mening for eleverne. De sidste tre spørgsmål er snarere fagdidaktiske. Men spørgsmål, som jeg anser for vigtige at diskutere med eleverne. Som måske kan hjælpe nogle af dem til at knække nogle koder.

Indholdet skal ikke opfindes fra bunden. Der findes masser af brugbart fagdidaktisk såvel som videnskabsteoretisk materiale. Men der skal vælges ud og oversættes (fortrinsvis) fra engelsk. Og så må vi ikke glemme den enorme praktiske viden, der er til stede hos underviserne i gymnasiet. Den skal aktiveres, så dagsordenen ikke sættes af didaktikere med baggrund i undervisning på andre niveauer og traditioner.

Jeg vil ganske kort uddybe punkterne fra før.

- Hvad er matematik?

- Hvad gør matematik til noget særligt?

Jeg er fra en tid, hvor svaret var enkelt: det er sætninger og beviser. Og der var én metode – den aksiomatisk-deduktive, som er helt speciel for matematik. Inderst inde mener jeg det stadig, og det er en væsentlig del af svaret på, hvad videnskabsfaget matematik er. Men hvor meget aksiomatisk-deduktiv metode bruger vi egentlig i gymnasiet? De fleste beviser er hamrende trivielle (for os), eleverne forstår ikke, hvad de gør godt for, og vi er glade, hvis eleverne bare kan bruge resultaterne (jeg kan naturligvis kun tale for mig selv). Bevisarbejdet kulminerer i forbindelse med differentialregningen, hvor vi til gengæld bygger på et uklart grænseværdibegreb, hvilket udhuler beviserne noget.

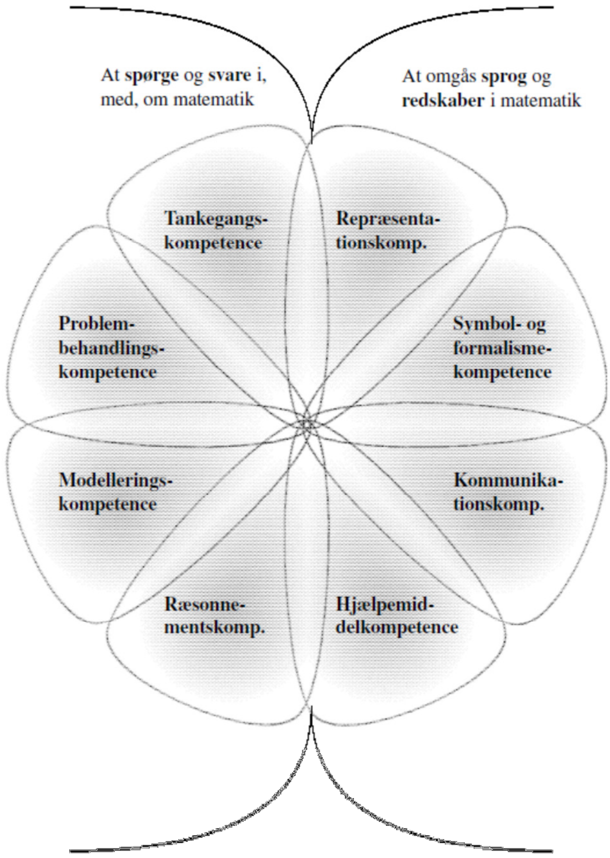
Hvis jeg skal forsøge at indfange det, vi rent faktisk gør i forbindelse med bevisgennemgangen, må det blive, at vi ud fra forholdsvis præcise definitioner og/eller givne forudsætninger (som ikke kan problematiseres!) vha. logikkens love opnår sikre resultater. Sproget (diskursen) i matematiktimerne adskiller sig markant fra hverdagssproget, de unge betjener sig af, ved sit krav til stringens: vi sløser alle med hverdagssproget, og alligevel forstår vi hinanden nogenlunde. Men selv mindre unøjagtigheder i den matematiske argumentation gør denne ubrugelig.

Beviser spiller under alle omstændigheder en mindre fremtrædende rolle i undervisningen end tidligere. Det hænger blandt andet sammen med et skift i matematiksynet fra det produktorienterede til det procesorienterede. Baggrunden for skiftet er en kritik af den traditionelle matematikundervisning, hvor matematikken blev præsenteret som en række eviggyldige resultater, der følger logisk af nogle ganske få forudsætninger. Ifølge kritikken giver dette et falsk billede af, hvad matematik er. Fordi matematikkens sætninger er slutproduktet af en lang proces, hvor matematikere har undersøgt hypoteser, som de har forkastet helt eller delvis. På denne baggrund har de formuleret nye hypoteser, som de har forkastet helt eller delvis osv. Det er processen frem til resultaterne, der ***er*** matematik. Og resultaterne er ikke så eviggyldige, som vi gerne vil give det indtryk af. Ikonet for dette skift er Imre Lakatos, hvis ***Proofs and Refutations*** (på dansk ***Beviser og gendrivelser***) har opnået kultstatus. Et ændret syn på, hvad det vil sige at lære (nemlig at eleven ***konstruerer*** sin viden selv) er medvirkende årsag til procesorienteringen. Læreplanens krav om eksperimentel matematik er en naturlig konsekvens af skiftet (og IT-værktøj, der gør det lettere at eksperimentere).

Skal eleverne slet ikke vide, at matematikken bygger på den aksiomatisk-deduktive metode? Jo, selvfølgelig skal de da det. Men som undervisere er vi nødt til at forholde os til, at vi ikke benytter den til daglig i gymnasiet. Der er nødt til at være overensstemmelse mellem det, vi fortæller eleverne er matematik (på gymnasieniveau forstås!), og det, vi rent faktisk bruger tiden på i matematikundervisningen. Kompetenceblomsten nedenfor kan hjælpe med at sætte ord på, hvad det er. Læseren kan som en lille øvelse tegne en blomst, hvor kronbladenes størrelse afspejler, hvor stor vægt, der lægges på kompetencerne i undervisningen.

Som jeg ser det, er der sket en drastisk ændring i blomsten i løbet af de 30 år, jeg har undervist i gymnasiet. I starten var modellerings- og hjælpemiddelbladet nærmest ikke-eksisterende. Nu er de altdominerende. Og vi bruger meget tid på en heroisk kamp med symbol- og formalismebladet, hvis vi da ikke resignerer og benytter CAS.

Denne prioritering skal indtænkes i vores beskrivelse af gymnasiefaget med en vægt, der modsvarer kronbladenes størrelse. Matematisk modellering er blevet den centrale matematiske metode i gymnasiesammenhæng.



Selv om jeg mener, at vi skal tage udgangspunkt i gymnasiefaget, skal vi ikke være blinde for, at der findes en verden uden for Verona. Den historiske dimension skal med: Hvor kommer matematikken fra, hvordan er den opstået, hvordan har den udviklet sig, og har synet på, hvad matematik er, altid været det samme? Glemmer vi vores historie, risikerer vi at miste vores identitet.

- Hvad skal eleverne lære i matematik og hvorfor?

Matematisk modellering og den fornødne symbol- og formalismekompetence er centrale. Demokratiargumentet er en vigtig del af argumentationen: en vis indsigt i modellering er en nødvendig forudsætning for at eleverne skal kunne agere som selvstændige, ansvarlige samfundsborgere. Om og hvordan vi indfrier dette mål, er et interessant spørgsmål.

- Hvad vil det sige at være god til matematik?

Målet er vist nok at skabe matematisk kompetente elever. I Kompetencerapporten fra 2002 defineres matematisk kompetence

Matematisk kompetence *består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå. Dette implicerer naturligvis en mangfoldighed af konkret viden og konkrete færdigheder inden for diverse matematiske områder, men matematisk kompetence kan ikke, jf. det foregående, reduceres til disse forudsætninger. (p. 44)*

Matematisk kompetence kan ifølge rapporten analytisk deles op i delkompetencerne i kompetence-blomsten. Det er svært at indvende noget mod, at eleverne skal være kompetente. Men jeg ser alligevel en uheldig nedprioritering af den æstetiske side af matematikken til fordel for den mere nyttebetonede. Tidligere eksisterede en klippefast tro på, at matematik havde en formaldannende virkning, dvs. at den logiske tænkning, vi trænede i matematikundervisningen, kunne overføres til andre områder. Det blev aldrig påvist, at denne overførsel rent faktisk fandt sted. Derimod viser talrige undersøgelser, at læring er situeret, dvs. at den viden man opnår i en bestemt sammenhæng, fx i matematiktimerne i skolen kun vanskeligt lader sig aktivere i andre sammenhænge. En af de store pædagogiske udfordringer består i at skabe en undervisning, der muliggør ***transfer***. Man kunne forstille sig, at det kunne lette arbejdet med modeller på et senere tidspunkt i uddannelses-forløbet, hvis eleverne arbejdede med hele modelleringsprocessen (og ikke bare den matematik-interne del) i gymnasiet. Men der er ingen garanti for, at det sker. Og ingen empiri, der kan af- eller bekræfte formodningen.

- Hvordan lærer man matematik, og hvorfor er det så svært?

Der findes næppe nogen kongevej til matematikken ;) Hvis der gjorde, skulle man tro, at den for længst var fundet. Der findes til gengæld en omfattende litteratur om matematiklæringsvanskelig-heder. Noget af den kunne måske hjælpe de elever, der slås med problemerne. Og naturligvis også de lærere, der skal planlægge undervisningen, så vanskelighederne imødegås.

Jeg vil i den forbindelse fremhæve den franske matematikdidaktiker Guy Brousseaus for begrebet ***Den didaktiske kontrakt*** til beskrivelse af en af hindringerne for, at læring finder sted:

Det er ikke sjovt at være i en situation, man ikke kan overskue, og hvor ens løsningsstrategier ikke slår til. Men det er den situation, vi bevidst anbringer eleverne i – det er nærmest en forudsætning for læring. Som Guy Brousseau bemærker, er det betingelser, som vi ikke ville byde voksne. Formålet med den stiltiende didaktiske kontrakt er at skabe den tryghed, der skal til i situationen. Kontraktbetingelserne er:

- Eleverne gør deres bedste

- Læreren giver eleverne de fornødne elementer til at situationen får en lykkelig udgang

Eleverne skal selv konstruere viden ud fra elementerne, men med mindre de forelagte problemer er trivielle, vil de være nødt til at indhente yderligere oplysninger fra læreren. Og det er her, man skal være forsigtig. For hvis læreren sætter elementerne sammen, er det ham/hende, der konstruerer, og ikke eleverne. De bliver passive tilskuere i stedet og lærer intet. Problemet er, at det af mange grunde kan være fristende at hjælpe eleverne mere, end godt er og for tidligt. Måske yder dette ultrakorte referat ikke Guy Brousseau retfærdighed, men der er virkelig noget at komme efter. Og jeg er endnu mere uretfærdig over for alle de didaktikere, der har skrevet spændende artikler om emnet, som jeg ikke nævner.

Jeg er af den faste overbevisning, at både elever og lærere kan have glæde af en gymnasiefagets teori som skitseret ovenfor. Måske kan teorien lige frem give undervisningen et løft.