Svar på opgave 208
(Marts 2004)

Vi skal løse ligningen

$$y^2 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

inden for de reelle tal. Vi sætter

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

og deler op i to tilfælde efter pariteten af x.

I. Antag x er lige

Så er

$$(x^2 + \tfrac{1}{2})^2 = x^4 + x^3 + \tfrac{1}{4}x^2 = S - \tfrac{1}{4}(3x^2 + 4x + 4) .$$

Her er $3x^2 + 4x + 4 > 0$ for alle x, så

$$(x^2 + \tfrac{1}{2})^2 < S .$$

På den anden side er

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}x + 1)^2 = x^4 + x^3 + \tfrac{9}{4}x^2 + x + 1 = S + \tfrac{5}{4}x^2 \geq S .$$

Dermed har vi at

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}x)^2 < S \leq (x^2 + \tfrac{1}{2}x + 1)^2 ,$$

hvor lighedstegnet kun gælder for x = 0. Da $x^2 + \frac{1}{2}x$ og $x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ er konsekutive hele tal, kan S ikke være et kvadrattal bortset fra tilfældet x = 0. I så fald har vi løsningerne $\underline{\underline{(x,y) = (0,\pm 1)}}$.

II. Antag x er ulige

Her er

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}\ x^4 + x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} = S + \tfrac{1}{4}(x^2 - 2x - 3) = S + \tfrac{1}{4}(x + 1)(x - 3)$$

og

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}\ x^4 + x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4} = S - \tfrac{1}{4}(7x^2 + 6x + 3) .$$

Nu er $7x^2 + 6x + 3 > 0$ for alle x. Vi har altså at hvis $x < -1$ eller $x > 3$ gælder

$$(x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2})^2 < S < (x^2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2})^2 \ ,$$

hvor $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ og $x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ er konsekutive hele tal. Altså er S heller ikke i dette tilfælde et kvadrattal.

Tilbage er nu kun at undersøge værdierne x = -1, 1 og 3. Hvis x = -1 er

$$y^2 = S = 1 - 1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 = 1 \ ,$$

så vi får løsningerne $\underline{\underline{(x,y) = (-1,\pm1)}}$.

Hvis x = 1 er

$$y^2 = S = 5 \ ,$$

hvilket ikke giver løsninger.

Hvis x = 3 er

$$y^2 = S = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121 \ ,$$

så vi får løsningerne $\underline{\underline{(x,y) = (3,\pm11)}}$.

I alt har ligningen altså de 6 nævnte løsninger.

Der var 5 løsere, der besvarede opgave 208.
Navnene offentliggøres ikke på nettet, men kan ses i *MatematikMagasinet 13*.