Svar på opgave 209 (April 2004)

Summen af 9 konsekutive kvadrattal er

$$n^2+(n+1)^2+\cdots+(n+8)^2=9n^2+72n+204=3(3n^2+24n+68)$$

Men vi kan ikke af 9 sådanne kvadrattal danne tre grupper der hver har en sum på $3n^2+24n+68$ fordi $(n+8)^2$ ikke kan grupperes med to af de andre kvadrattal så summen bliver den ønskede. I stedet danner vi grupperne

$$(n+1)^2+(n+3)^2+(n+8)^2=3n^2+24n+74$$
$$n^2+(n+5)^2+(n+7)^2=3n^2+24n+74$$
$$(n+2)^2+(n+4)^2+(n+6)^2=3n^2+24n+56$$

Metoden er nu at dele de 54 kvadrater i 6 grupper med 9 kvadrater i hver svarende til n = 1, 10, 19, 28, 37, 46:

$G_1=\{1^2, 2^2, \dots, 9^2\}$, $G_2=\{10^2, 11^2, \dots, 18^2\}$, $G_3=\{19^2, 20^2, \dots, 27^2\}$
$G_4=\{28^2, 29^2, \dots, 36^2\}$, $G_5=\{37^2, 38^2, \dots, 45^2\}$, $G_6=\{46^2, 47^2, \dots, 54^2\}$

Derefter dannes den endelige opdeling i tre mængder S_1, S_2 og S_3 af kvadrater ved i hver mængde at medtage 2 sæt med summen $3n^2+24n+74$ og 1 sæt med summen $3n^2+24n+56$ for hver af de 6 grupper. Metoden fremgår af skemaet:

	S_1		S_2		S_3	
G_1	2 , 4 , 9	(74)	1 , 6 , 8	(74)	3 , 5 , 7	(56)
G_2	10 , 15 , 17	(74)	11 , 13 , 18	(74)	12 , 14 , 16	(56)
G_3	21 , 23 , 25	(56)	20 , 22 , 27	(74)	19 , 24 , 26	(74)
G_4	30 , 32 , 34	(56)	29 , 31 , 36	(74)	28 , 33 , 35	(74)
G_5	38 , 40 , 45	(74)	39 , 41 , 43	(56)	37 , 42 , 44	(74)
G_6	47 , 49 , 54	(74)	48 , 50 , 52	(56)	46 , 51 , 53	(74)

Summen af kvadraternes arealer i hver gruppe er den samme.
Den er nemlig

$$2^2+4^2+9^2+10^2+15^2+\cdots+49^2+54^2$$
$$=1^2+6^2+8^2+11^2+13^2+\cdots+50^2+52^2$$
$$=3^2+5^2+7^2+12^2+14^2+\cdots+51^2+53^2=17985 .$$

I øvrigt gælder som bekendt

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Så

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 54^2 = \tfrac{1}{6} \cdot 54 \cdot 55 \cdot 109 = 53955 = 3 \cdot 17985 \ .$$

Der er modtaget 4 besvarelser af denne opgave.
Navnene offentliggøres ikke på nettet, men kan ses i *MatematikMagasinet.*