Svar på opgave 211 (August 2004)

Vi skal finde de funktionen *f* der for $|x| \neq 1$ opfylder funktionalligningen

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{x+3}{1-x}\right) = x\ . \qquad (1)$$

Vi ser på en af brøkerne i ligningen (1) og sætter

$$y = \frac{x+3}{1-x}\ .$$

Så er

$$y = \frac{x+3}{1-x} \Leftrightarrow y - xy = x + 3 \Leftrightarrow y - 3 = x + xy \Leftrightarrow x = \frac{y-3}{y+1}\ . \qquad (2)$$

hvor $y \neq \pm 1$. Vi finder den anden brøk i funktionalligningen (1):

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{\frac{y-3}{y+1}}{\frac{y-3}{y+1}} = \frac{y-3-3(y+1)}{y-3+y+1} = \frac{y+3}{1-y}\ . \qquad (3)$$

Af funktionalligningen (1), som *f* opfylder, får vi nu

$$f(x) + f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = f\left(\frac{y-3}{y+1}\right) + f\left(\frac{y+3}{1-y}\right) = y$$

eller

$$f(x) + f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = \frac{x+3}{1-x}\ . \qquad (4)$$

Nu ser vi på den anden brøk i funktionalligningen (1) og sætter

$$y = \frac{x-3}{x+1}$$

og får at $y \neq \pm 1$ og

$$y = \frac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{1-y}\ ,$$

og af (3) får vi

$$\frac{y-3}{y+1} = \frac{x+3}{1-x}\ .$$

Altså er

$$f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)+f(x)=f\left(\frac{y-3}{y+1}\right)+f\left(\frac{y+3}{1-y}\right)=y$$

eller

$$f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)+f(x)=\frac{x-3}{x+1}\quad , \tag{5}$$

idet vi igen har brugt (1). Ved addition af (4) og (5) får vi ved brug af (1):

$$2\cdot f(x)+f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)+f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = \frac{x+3}{1-x} + \frac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow 2\cdot f(x)+x = \frac{x+3}{1-x}+\frac{x-3}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot f(x)+x=\frac{8x}{1-x^2} \Leftrightarrow f(x)=\frac{7x+x^3}{2-2x^2}\ .$$

Dermed er funktionen *f* fundet - der er altså kun denne ene mulighed. En prøve viser at den faktisk opfylder funktionalligningen (1).

Der er modtaget 16 besvarelser af denne opgave.
Navnene offentliggøres ikke på nettet, men kan ses i *MatematikMagasinet*.