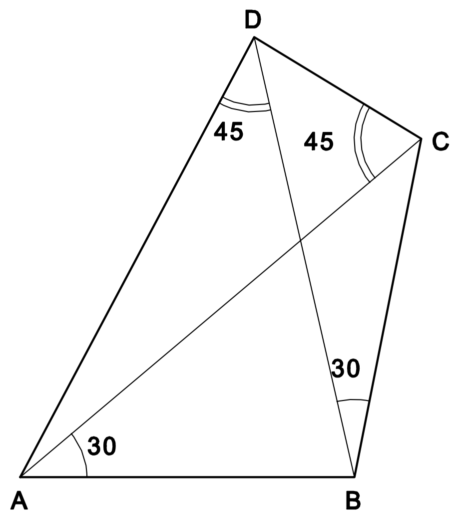
Svar på opgave 212 (September 2004)



I $\square ABCD$ oplyses at $\angle CAB = \angle DBC = 30°$ og $\angle ADB = \angle ACD = 45°$. Vi skal bestemme firkantens vinkler.

Vi betegner med O diagonalernes skæringspunkt og sætter $x = \angle AOB$. Så er

$$\angle OBA = 30° \ , \ \angle OCB = x - 30° \ , \ \angle ODC = 135° - x$$
$$\angle AOD = 180° - x \ , \ \angle OAD = x - 45° \ .$$

Sinusrelationerne i de fire trekanter med vinkelspidser i O giver

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\sin(150° - x)}{\sin 30°} = \frac{\sin(30° + x)}{\sin 30°} = 2\sin(30° + x)$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{\sin(x - 30°)}{\sin 30°} = 2\sin(x - 30°)$$

$$\frac{OC}{OD} = \frac{\sin(135° - x)}{\sin 45°} = \frac{\sin(x + 45°)}{\sin 45°} = \sqrt{2}\sin(x + 45°)$$

$$\frac{OD}{OA} = \frac{\sin(x - 45°)}{\sin 45°} = \sqrt{2}\sin(x - 45°) \ .$$

Ved multiplikation af disse ligninger fås

$$2\sin(x+30°)\cdot 2\sin(x-30°)\cdot\sqrt{2}\sin(x+45°)\cdot\sqrt{2}\sin(x-45°)=1$$
$$\Leftrightarrow\ 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}+\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sin x}{\sqrt{2}}-\frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right)=1$$
$$\Leftrightarrow\ (3\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=1$$
$$\Leftrightarrow\ (3-4\cos^2 x)(1-2\cos^2 x)=1\ \Leftrightarrow\ 4\cos^4 x-5\cos^2 x+1=0\ \Leftrightarrow\ \cos x=\pm 1\ \vee\ \cos x=\pm\tfrac{1}{2}$$

Ligningerne $\cos x = \pm 1$ giver ingen brugbare løsninger. Og da

$$\cos x = \pm\tfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x=60°\ \vee\ x=120°\ ,$$

får vi følgende to firkanter:

$x = 60°$: (A,B,C,D) = (45° , 120° , 75° , 120°)
$x = 120°$: (A,B,C,D) = (105° , 60° , 135° , 60°) .

Der er modtaget 10 besvarelser af denne opgave.
Navnene offentliggøres ikke på nettet, men kan ses i *MatematikMagasinet.*