Svar på opgave 213 (Oktober 2004)

Vi skal vise, at der for positive tal a, b og c gælder, at

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca) .$$

Vi sætterx

$$x = a + b + c \ , \ y = ab + bc + ca \ , \ z = abc \ .$$

Så er

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = x^2 - 2y$$

og

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2(ab\cdot bc + bc\cdot ca + ca\cdot ab)$$

$$= y^2 - 2abc(a + b + c) = y^2 - 2xz .$$

Nu er

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) = a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 8$$

$$= z^2 + 2(y^2 - 2xz) + 4(x^2 - 2y) + 8 ,$$

så vi skal vise uligheden

$$z^2 + 2y^2 - 4xz + 4x^2 - 8y + 8 \ \geq \ 9y \ \Leftrightarrow \ z^2 + 2y^2 - 4xz + 4x^2 - 17y + 8 \geq 0 \qquad (1)$$

Vi har den kendte ulighed

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \qquad (2)$$

fordi

$$(a - b)^2 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ a^2 + b^2 \geq 2ab \quad , \quad b^2 + c^2 \geq 2bc \quad , \quad c^2 + a^2 \geq 2ca \ ,$$

og addition af disse uligheder giver (2). Derefter kan (2) skrives:

$$x^2 - 2y \ \geq \ y \ \Leftrightarrow \ x^2 \geq 3y \ . \qquad (3)$$

På same måde er

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq \ ab\cdot ac + ac\cdot bc + bc\cdot ab = (a + b + c)abc$$

eller

$$y^2 - 2xz \geq xz \ \Leftrightarrow \ y^2 \geq 3xz \ . \qquad (4)$$

Endelig ser vi på (1):

$$z^2 + 2y^2 - 4xz + 4x^2 - 17y + 8 \geq 0 \ \Leftrightarrow \ 9z^2 + 18y^2 - 36xz + 36x^2 - 153y + 72 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \ (3z - x)^2 + 8(y - 3)^2 + 10(y^2 - 3xz) + 35(x^2 - 3y) \ \geq \ 0 \ ,$$

og denne sidste ulighed er sand efter (3) og (4).

Der er modtaget svar på opgave 213 fra 5 personer.