# Svar på opgave 214 (November 2004)

Ved brug af et passende cas-program får vi at

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}+\frac{1}{100}=\frac{14466636279520351160221518043104131447711}{2788815009188499086581352357412492142272} = \frac{A}{B},$$

og heraf fås det ønskede: Hverken $A$ eller $B$ er delelig med 5.

Vi gennemfører dog også et mere 'humant' bevis. Vi begynder med at dele nævnerne 1, 2, 3, . . ., 98, 99, 100 op i grupper afhængige af deres delelighed med 5. Mængden $S_0$ består af alle de tal, der ikke er delelige med 5, $S_1$ af de tal, der er delelige med 5, men ikke med 25 og $S_2$ er tallene, der er delelige med 25, dvs. vi har

$$S_0 = \{1,2,3,4,6,7,8,\ldots,97,98,99\}$$
$$S_1 = \{5,10,15,20,30,\ldots,85,90,95\}$$
$$S_3 = \{25,50,75,100\}\ .$$

Svarende til denne inddeling definerer vi summerne $A_0$, $A_1$ og $A_2$ sådan:

$$A_0 = 100!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}\right)$$

$$A_1 = 100!\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots+\frac{1}{90}+\frac{1}{95}\right)$$

$$A_2 = 100!\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{50}+\frac{1}{75}+\frac{1}{100}\right)\ .$$

Det er oplagt, at tallene $A_0$, $A_1$ og $A_2$ er hele tal og at

$$\frac{A}{B}=\frac{A_0+A_1+A_2}{100!}\ .$$

Ved udregning får vi at

$$A_2=\frac{100!}{25}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{100!}{25}\cdot\frac{25}{12}=\frac{100!}{12}.$$

Den højeste potens af 5, som går op i dette tal, er antallet af gange, som faktoren 5 optræder i tælleren. Der er 20 multipla af 5 mellem 1 og 100 og 4 multipla af 25, så $A_2$ er delelig med faktoren $5^{24}$.

Derefter ser vi på $A_1$. Vi udregner

$$\frac{1}{5n+1}+\frac{1}{5n+2}+\frac{1}{5n+3}+\frac{1}{5n+4}=\frac{50(2n+1)(5n^2+5n+1)}{(5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)}\ .$$

Nævneren på højre side er ikke delelig med 5 og faktoren $5n^2 + 5n + 1$ er heller ikke delelig med 5.

Hvis summen på venstre side af lighedstegnet udtrykkes som en uforkortelig brøk $\frac{a}{b}$, er $b$ ikke delelig med 5 og den potens af 5, der går op i $a$ er mindst 2 på grund af faktoren 50. Vi kan skrive udtrykket for $A_1$ sådan:

$$A_1 = \frac{100!}{5}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}\right)\right],$$

hvor prikkerne repræsenterer yderligere to parenteser med 4 brøker i hver. Hver brøk reduceres til en brøk med en nævner, der ikke er delelig med 5 og med en tæller, der er et multiplum af 25. Derfor har vi, at den højeste potens af 5, der går op i $A_1$ er $24 - 1 + 2 = 25$.

Vi kan benytte samme argument for $A_0$, som giver

$$A_0 = 100!\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{96}+\frac{1}{97}+\frac{1}{98}+\frac{1}{99}\right)\right].$$

Hver parentes giver en brøk, hvis nævner ikke er delelig med 5 og en tæller, der er delelig med 25, så den højeste potens af 5, der går op i $A_0$ er mindst 26.

Alt i alt har vi, at

$A_0$ er delelig med mindst $5^{26}$ , $A_1$ er delelig med mindst $5^{25}$ , $A_2$ er delelig med præcis $5^{24}$ .

Derfor er $A_0 + A_1 + A_2$ delelig med præcis $5^{24}$, og da som nævnt 100! er delelig med præcis $5^{24}$, slutter vi, at brøken

$$\frac{A}{B} = \frac{A_0 + A_1 + A_2}{100!}$$

har en tæller og en nævner, der er delelige med *samme* potens af 5. Når denne fælles faktor forkortes bort, er hverken $A$ eller $B$ er delelige med 5.

*Der er indkommet 5 besvarelser.*