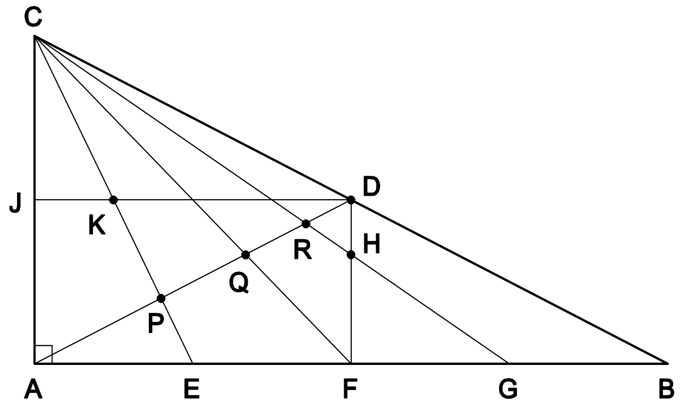
Svar på opgave 215 (December 2004)



Vi har, at CF og AD er medianer i ΔABC, så $AQ = \frac{2}{3}AD$. Desuden er $DA = DC = DB$. Punktet D projiceres på kateterne AC og AB i J og F. I ΔCFB er CG og FD medianer, der skærer hinanden i H, og derfor er

$$\frac{HD}{FD} = \frac{1}{3}.$$

Nu er ΔARC og ΔDRH ensvinklede, og da

$$HD = \tfrac{1}{3}FD = \tfrac{1}{3}JA = \tfrac{1}{6}AC\ ,$$

er deres størrelsesforhold 6:1, så

$$\frac{AR}{RD} = 6\ .$$

Dermed er

$$\frac{AD}{RD} = \frac{AR+RD}{RD} = 7 \quad \text{så} \quad RD = \tfrac{1}{7}AD\ .$$

Idet K er skæringspunkt mellem JD og CE, har vi at

$$AE = \tfrac{1}{4}AB \quad \text{og} \quad JK = \tfrac{1}{4}JD\ ,$$

og dermed

$$\frac{KD}{AE} = \frac{JD - JK}{\frac{1}{4}AB} = \frac{\frac{3}{4}JD}{\frac{1}{4}AB} = \frac{3JD}{AB} = \frac{\frac{3}{2}AB}{AB} = \frac{3}{2}\ .$$

Da ΔAPE og ΔKPD er ensvinklede, er

$$\frac{PD}{AP} = \frac{3}{2}\ ,$$

hvoraf

$$\frac{AD}{AP} = \frac{AP+PD}{AP} = 1 + \frac{PD}{AP} = \frac{5}{2} \quad \text{eller} \quad AP = \tfrac{2}{5}AD\ .$$

Nu er endelig

$$PQ = AQ - AP = \tfrac{2}{3}AD - \tfrac{2}{5}AD = \tfrac{4}{15}AD$$
$$QR = QD - RD = \tfrac{1}{3}AD - \tfrac{1}{7}AD = \tfrac{4}{21}AD\ .$$

Altså er det ønskede forhold

$$\frac{PQ}{QT} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}\ .$$

En del indsendere bruger analytisk geometri, hvilket letter opgaven en del. Måske er analytisk geometri en smule 'usportsligt' i forbindelse med rene geometriske opgaver.

Der er indkommet 7 besvarelser.