Svar på opgave 216 (Januar 2005)

Vi skal vise, at hvis $n \geq 1$ og $k \geq 2$ er naturlige tal, så er

$$\frac{2}{\sqrt[k]{n+1}+\sqrt[k]{n-1}} > \frac{1}{\sqrt[k]{n}} \quad .$$

Vi benytter uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal og får

$$\sqrt[k]{n+1} = \sqrt[k]{n} \cdot \sqrt[k]{1+\tfrac{1}{n}} = \sqrt[k]{n} \cdot \sqrt[k]{(1+\tfrac{1}{n}) \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}$$
$$< \sqrt[k]{n} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}+1+1+\cdots+1}{k} = \sqrt[k]{n} \cdot \frac{\frac{1}{n}+k}{k} = \sqrt[k]{n} \cdot \frac{1+nk}{nk}$$

Her optræder k - 1 1-taller under rodtegnet og som led i summen i tælleren. På samme måde er

$$\sqrt[k]{n-1} \;<\; \sqrt[k]{n} \cdot \frac{-\frac{1}{n}+k}{k} = \sqrt[k]{n} \cdot \frac{kn-1}{nk} \;.$$

Addition giver

$$\sqrt[k]{n+1}+\sqrt[k]{n-1} \;<\; \sqrt[k]{n} \cdot \frac{1+nk+kn-1}{nk} = 2\sqrt[k]{n} \;,$$

og dette er ensbetydende med det ønskede.

En del indsendere bemærker, at funktionen $f(x) = \sqrt[k]{x}$ er konkav og så fremgår uligheden også let.

Til opgaven er der er indkommet svar fra 11 løsere.