Svar på opgave 218 (Marts 2005)

Opgaven:

Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$x^2 = \frac{3x - y}{x - 3y} \quad , \quad y^2 = \frac{3y - z}{y - 3z} \quad , \quad z^2 = \frac{3z - x}{z - 3x} \ .$$

Svar:

Hverken x, y eller z kan være 0. Den første ligning giver

$$x^2 = \frac{3x - y}{x - 3y} \iff x^3 - 3x^2 y = 3x - y \iff y = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \ ,$$

og de to andre ligninger giver tilsvarende

$$z = \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \quad \text{og} \quad x = \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} \ .$$

Nu findes et entydigt bestemt tal $v \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, så $x = \tan v$. Dermed er efter en kendt (!!) formel fra trigonometrien:

$$y = \frac{3\tan v - \tan^3 v}{1 - 3\tan^2 v} = \tan 3v \ ,$$

og videre

$$z = \frac{3\tan 3v - \tan^3 3v}{1 - 3\tan^2 3v} = \tan 9v \quad \text{og} \quad x = \frac{3\tan 9v - \tan^3 9v}{1 - 3\tan^2 9v} = \tan 27v \ .$$

Altså er $\tan v = \tan 27v$, så v og $27v$ har en forskel på et multiplum af π:

$$27v - v = k\pi \iff v = \frac{k\pi}{26} \ , \ k \in Z \ ,$$

hvor k opfylder, at

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{k\pi}{26} < \frac{\pi}{2} \iff -13 < k < 13 \ ,$$

og desuden er $k \neq 0$, fordi $x \neq 0$. De mulige værdier af k er derved $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 12$, og hver af disse værdier giver en tripel (x,y,z), der er løsning:

$$(x, y, z) = \left(\pm \tan \tfrac{27k\pi}{26}, \pm \tan \tfrac{3k\pi}{26}, \pm \tan \tfrac{9k\pi}{26} \right) .$$

Ligningssystemet har altså 24 løsninger.

Til opgaven er der er indkommet svar fra 8 løsere.