Svar på opgave 219 (April 2005)

Opgaven:

Find alle talsæt (a,b,c) af naturlige tal, for hvilke

$$a + 2b + 3c = abc$$

Svar:

Vi har at

$$a + 2b + 3c = abc \iff a + 2b = c(ab - 3) \iff c = \frac{2b+a}{ab-3}$$

$$a + 2b + 3c = abc \iff a + 3c = b(ac - 2) \iff b = \frac{3c+a}{ac-2}$$

$$a + 2b + 3c = abc \iff 2b + 3c = a(bc - 1) \iff a = \frac{2b+3c}{bc-1} \ .$$

Derfor må løsningerne opfylde, at $ab \geq 3$, $ac \geq 2$, $bc \geq 1$.

Vi deler op i en række tilfælde:

I. For $a = 1$ fås

$$c = \frac{2b+1}{b-3} = 2 + \frac{7}{b-3} \ ,$$

og da b - 3 skal gå op i 7, må $b = 4$ eller $b = 10$, så vi får løsningerne (1,4,9) og (1,10,3).

II. For $a = 2$ fås

$$c = \frac{2b+2}{2b-3} = 1 + \frac{5}{2b-3}$$

Her slutter vi, at $b = 2$ eller $b = 4$, så vi før løsningerne (2,2,6) og (2,4,2).

III. For $a = 3$ fås

$$b = \frac{3c+3}{3c-2} = 1 + \frac{5}{3c-2} \ ,$$

Hvoraf $c = 1$, så løsning er (3,6,1).

IV. For $b = 1$ fås

$$c = \frac{a+2}{a-3} = 1 + \frac{5}{a-3} \ ,$$

hvoraf $a = 4$ eller $a = 8$, så løsninger er (4,1,6) og (8,1,2).

V. For $c = 1$ får vi

$$a = \frac{2b+3}{b-1} = 2 + \frac{5}{b-1} \ ,$$

hvoraf $b = 6$ eller $b = 2$. Løsninger er (3,6,1) og (7,2,1).

Der kan ikke findes andre løsninger end disse, thi hvis $a > 3$ og $b > 1$ og $c > 1$, fandtes naturlige tal p, q og r så

$$a = 3 + p \ , \ b = 1 + q \ , \ c = 1 + r \ ,$$

hvoraf

$$a + 2b + 3c = 8 + p + 2q + 3r$$

$$abc = 3 + p + 3q + 3r + pq + pr + 3qr + pqr \ .$$

Den givne ligning ville så være ensbetydende med

$$8 + p + 2q + 3r = 3 + p + 3q + 3r + pq + pr + 3qr + pqr$$

$$\Leftrightarrow \ 5 = q + pq + pr + 3qr + pqr \geq 7 \ ,$$

hviket er umuligt.

Ved at gøre prøve ser man, at de anførte 8 tripler

(1,4,9) , (1,10,3) , (2,2,6) , (2,4,2) , (3,6,1) , (4,1,6) , (7,2,1) , (8,1,2)

faktisk er løsninger.

Til opgaven er der er indkommet 12 besvarelser.