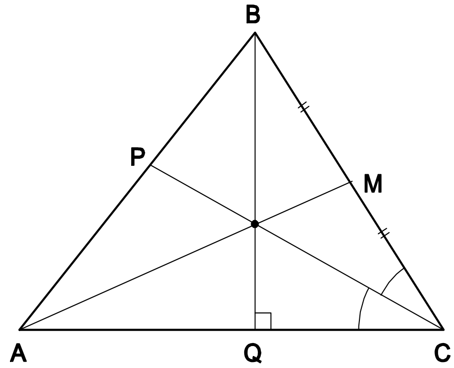
Svar på opgave 220 (Maj 2005)

Opgaven:



I ΔABC, som ikke er ligesidet og som har hele sidelængder, går medianen fra A, højden fra B og vinkelhalveringslinjen fra C gennem samme punkt. Desuden er $AC = 15$.

Bestem siderne AB og BC.

Findes der trekanter med hele sidelængder, der opfylder kravene oven for, som *ikke* er ensvinklede med den nævnte trekant?

Svar:

Lad AM være median, CP vinkelhalveringslinje og BQ højde. Disse tre linjer skærer hinanden i samme punkt, så Cevas sætning giver

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BP}{PA}=1 \quad ,$$

og da $CM = MB$ er altså

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{BP}{PA}=1 \ .$$

Da CP er halveringslinje for vinkel C er

$$\frac{BP}{PA}=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b} \ ,$$

så vi får

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{a}{b}=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{AQ}{QC}=\frac{b}{a} \ . \qquad (1)$$

Da desuden $AQ + QC = b$ giver dette sammen med (1), at

$$QC = \frac{ab}{a+b} \quad \text{og} \quad AQ = \frac{b^2}{a+b} \ .$$

Nu giver Pythagoras sætning, at

$$BC^2 - CQ^2 = AB^2 - QA^2 \quad \Leftrightarrow \quad BC^2 - AB^2 = CQ^2 - QA^2$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 - c^2 = \frac{a^2b^2}{(a+b)^2} - \frac{b^4}{(a+b)^2} \quad \Leftrightarrow \quad c^2 = a^2 - b^2 + \frac{2b^3}{a+b} \ .$$

Hvis vi heri indsætter $b = 15$, får vi

$$c^2 = a^2 - 225 + \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 5^3}{a+15} \ .$$

Derfor må $a + 15$ være af formen

$$\mathrm{a} + 15 = 2^s \cdot 3^t \cdot 5^u \quad \text{hvor} \quad (s,t,u) \in \{0,1\} \times \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\} \ ,$$

dvs. der er 32 muligheder. Kravet $a + 15 > 15$ udelukker dog straks de 8 muligheder

$$(s,t,u) = (0,0,0) \ , (0,1,0) \ , (0,0,1) \ , (0,2,0) \ , (0,1,1) \ , (1,0,0) \ , (1,1,0) \ , (1,0,1) \ .$$

Blandt de resterende 24 tripler søger vi dem, der giver anledning til, at

$$a^2 - 225 + \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 5^3}{a+15}$$

er et positivt kvadrattal. Kun triplerne

$$(s,t,u) = (1,1,1) \ , \ (0,3,0) \quad \text{svarende til} \quad (a,c) = (15,15) \ , (12,13)$$

giver det ønskede resultat. Den eneste mulighed er derfor en trekant med siderne (12,15,13). Man kontrollerer, at denne opfylder kravet til median, højde og vinkelhalveringslinje.

Der findes desuden mindst to familier af heltalstrekanter, der opfylder kravene, nemlig trekanter med sidelængder
$(a,b,c) = t \cdot (35,308,277)$ og $(a,b,c) = t \cdot (26598 \ , 3193 \ , 26447)$.