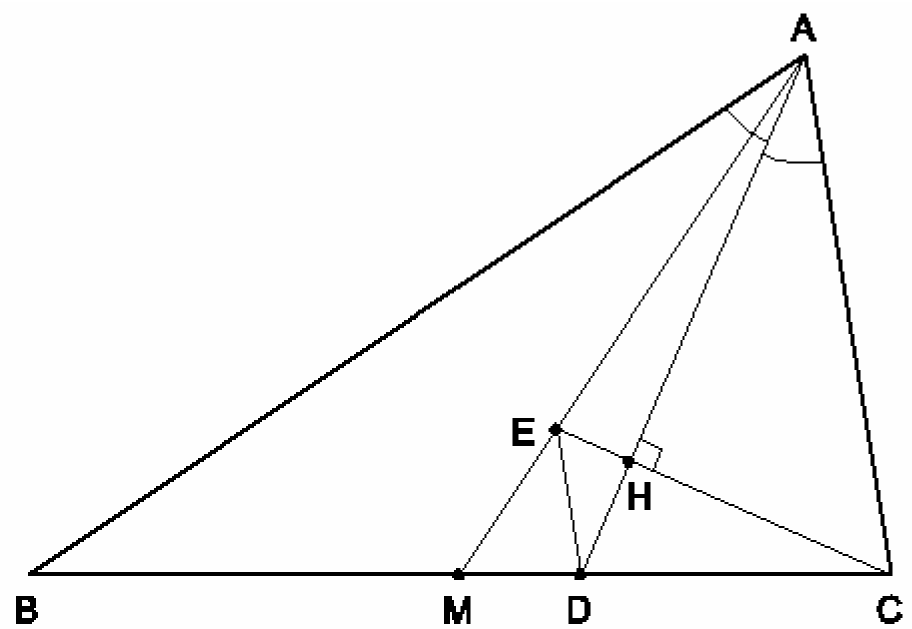
Svar på opgave 223 (Oktober 2005)

Opgave:



I ΔABC er $AB > AC$. AM og AD er henholdsvis median og vinkelhalveringslinje fra A. Punktet H er projektionen af C på AD og CH skærer AM i E.

Vis, at DE og AC er parallelle.

Besvarelse:

Vi forlænger *AM* til *F*, så *AM* = *MF* og trækker linjerne *FB* og *FC*. Så er □*ABFC* et parallelogram, fordi diagonalerne halverer hinanden.

Vi har, at

$$\begin{aligned} &\angle BAC + \angle ACF = 180° \iff \angle BAD + \angle DAC + \angle ACF = 180° \\ &\iff \angle BAD + \angle DAC + \angle ACE + \angle ECF = 180° . \end{aligned} \qquad (1)$$

I ΔAHC får vi, at

$$\angle HAC + \angle ACH = 90° \iff \angle DAC + \angle ACE = 90° , \qquad (2)$$

og dette giver sammen med (1), at

$$\angle BAD + \angle ECF = 90° .$$

Heraf fås

$$\angle ECF = 90° - \angle BAD = 90° - \angle DAC = \angle ACE \ ,$$

hvor det sidste lighedstegn stammer fra (2). Dermed er CE halveringslinje for $\angle ACF$, så

$$\frac{AE}{EF} = \frac{CA}{CF} = \frac{CA}{AB} \ . \qquad (3)$$

Da AD halverer $\angle BAC$, er

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{CA} \ . \qquad (4)$$

Af (3) og (4) fås

$$\frac{BD}{DC} = \frac{EF}{AE} \Leftrightarrow \frac{BD - DC}{DC} = \frac{EF - AE}{AE} \ . \qquad (5)$$

Nu er

$$BD - DC = BM + MD - DC = BM + MD - (CM - MD) = 2MD + BM - CM = 2MD \ .$$

På samme måde er

$$EF - AE = EM + MF - AE = EM + MF - (AM - EM) = 2EM + MF - AM = 2EM \ .$$

Derfor kan vi skrive (5) sådan:

$$\frac{MD}{DC} = \frac{ME}{EA} \ .$$

Men dette er ensbetydende med, at $ED \parallel AC$.

Svar på denne opgave modtaget fra 2 personer.