Svar på opgave 225 (December 2005)

Opgave:

a. Vi ser på tallene a og b defineret ved

$$a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \cdots + \sqrt{2^{2n+1}} \quad \text{og} \quad b = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} - \cdots + \sqrt{2^{2n+1}} \ .$$

Vis, at $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ er et naturligt tal.

b. Bestem de rationale løsninger (a,b) til ligningen

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \ .$$

c. Vis, at tallet

$$\underbrace{444....4}_{2004}\,\underbrace{888...8}_{1002} ,$$

hvor cifferet 4 optræder 2004 gange og cifferet 8 1002 gange, er et kvadrattal.

Besvarelse:

a. Idet

$$a = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \cdots + \sqrt{2^{2n+1}} \quad \text{og} \quad b = -1 + \sqrt{2} - \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} - \cdots + \sqrt{2^{2n+1}} \ .$$

er a og b kvotientrækker, så vi får

$$a = \frac{\sqrt{2}^{2n+2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2^{n+1} - 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)(2^{n+1} - 1) \ ,$$

$$b = \frac{1 - 2^{n+1}}{-\sqrt{2} - 1} = (2^{n+1} - 1)(\sqrt{2} - 1) \ .$$

Altså får vi

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 6.$$

b. Vi omskriver ligningen sådan:

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \iff 2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6} = 4a + 9b + 12\sqrt{ab}$$
$$\iff 2a^2 + 3b^2 - 4a - 9b + 2ab\sqrt{6} = 12\sqrt{ab} \ .$$

Vi sætter $x = 2a^2 + 3b^2 - 4a - 9b$, så vi får

$$x+2ab\sqrt{6}=12\sqrt{ab} \;\Leftrightarrow\; (x+2ab\sqrt{6})^2=144ab \;\Leftrightarrow\; x^2+4abx\sqrt{6}+24a^2b^2=144ab$$

$$\Leftrightarrow\; 4abx\sqrt{6}=144ab-x^2$$

$$\Leftrightarrow\; 4(2a^2+3b^2-4a-9b)ab\sqrt{6}=144ab-(2a^2+3b^2-4a-9b)^2-24a^2b^2$$

Da a og b er rationale, får vi heraf ligningssystemet

$$\begin{aligned} &4ab(2a^2+3b^2-4a-9b)=0\\ &144ab-(2a^2+3b^2-4a-9b)^2-24a^2b^2=0\ . \end{aligned}$$

Dette system spaltes op i tre ligningssystemer ved hjælp af nulreglen i den første ligning:

$$\begin{array}{lll} a=0 & & b=0\\ 2a^2+3b^2-4a-9b=0 & & \\ (3b^2-9b)^2=0 & & (2a^2+4a)^2=0\\ 144ab-24a^2b^2=0\ . & & \end{array}$$

Disse løses let, og vi får de mulige løsninger

$$(a,b)\ :\ (0,0)\ ,\ (0,3)\ ,\ (2,0)\ ,\ (2,3)\ ,\ (3,2)\ ,$$

som ved indsættelse viser sig at passe.

c. Vi skal vise, at tallet

$$\underbrace{444....4}_{2004}-\underbrace{888...8}_{1002}\ ,$$

hvor cifferet 4 optræder 2004 gange og cifferet 8 1002 gange, er et kvadrattal.

1. metode. Vi lægger mærke til, at (!)

$$\begin{aligned} &44-8=6^2\\ &4444-88=66^2\\ &444444-888=666^2 \quad \text{osv.} \end{aligned}$$

og i almindelighed er (egentlig induktion)

$$\underbrace{444...4}_{2n\text{ cifre}}-\underbrace{888...8}_{n\text{ cifre}}=\underbrace{666...6}_{n\text{ cifre}}{}^2$$

2. metode. Vi sætter x = 111…1 (n cifre). Så er

$$9x=999...9=10^n-1\ .$$

Vi får så

$$\underbrace{444...4}_{2n\text{ cifre}}-\underbrace{888...8}_{n\text{ cifre}}=4x\cdot 10^n+4x-8x=4x\,(10^n-1)=4x\cdot 9x=(6x)^2\ .$$

3. metode. Vi kan omskrive sådan:

$$\begin{aligned} &444....4-888...8\\ &=\ 4\cdot 10^{2n-1}+4\cdot 10^{2n-2}+\cdots+4\cdot 10+4-8\cdot 10^{n-1}-8\cdot 10^{n-2}-\cdots-8\cdot 10-8 \end{aligned}$$

$$= 4\cdot(10^{2n-1}+\cdots+10^{n}) - 4(10^{n-1}+\cdots+10+1) = 4\cdot\left(10^{n}\cdot\tfrac{10^{n}-1}{10-1} - 1\cdot\tfrac{10^{n}-1}{10-1}\right)$$

$$= \frac{4}{9}(10^{2n} - 2\cdot 10^{n} + 1) = \frac{4}{9}(10^{n}-1)^{2}\ ,$$

og dette sidste tal er åbenbart kvadratet på

$$\frac{2}{3}(10^{n}-1) = 666....6 \quad (n \text{ cifre})\ .$$

Der er modtaget 7 besvarelser.