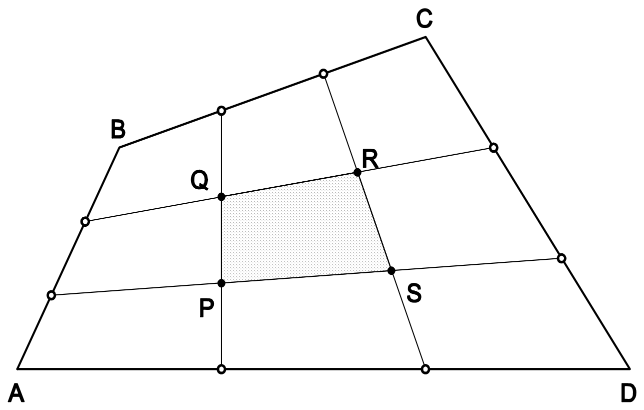
Svar på opgave 233
(Oktober 2006)

Opgave:



I en konveks □*ABCD* forbindes modstående siders tredelingspunkter som vist.
Bestem arealet af den indre □*PQRS* i forhold til arealet af □*ABCD*.

Besvarelse:

1. metode.
Arealet af den indre firkant PQRS er $\frac{1}{9}$ af arealet af firkant ABCD.

Hvis vi benytter skrivemåden [...] til at betegne areal, har vi at

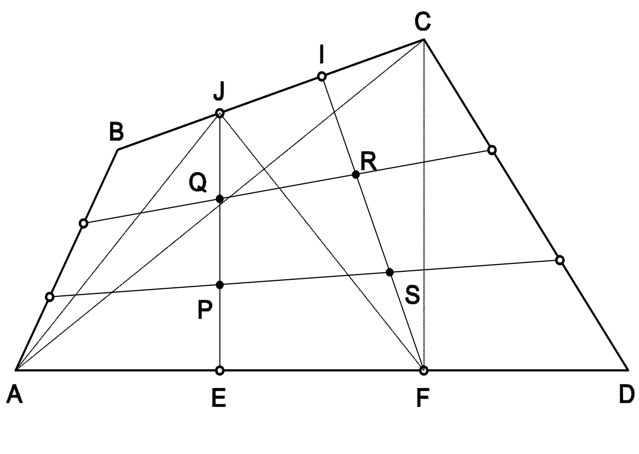
$$[AJB] = \tfrac{1}{3}\,[ABC] \quad \text{og} \quad [CFD] = \tfrac{1}{3}\,[ACD]\,,$$

så at

$$[AJB] + [CFD]$$
$$= \tfrac{1}{3}\,([ABC] + [ACD])$$
$$= \tfrac{1}{3}\,[ABCD]$$

Men så er

$$[AFCJ] = [ABCD] - [AJB] - [CFD]$$
$$= \tfrac{2}{3}[ABCD]\,. \qquad (1)$$



Videre er

$$[EFIJ] = [EFJ] + [FIJ] = \tfrac{1}{2}[AFJ] + \tfrac{1}{2}[CFJ] = \tfrac{1}{2}([AFJ] + [CFJ]) = \tfrac{1}{2}[AFCJ],$$

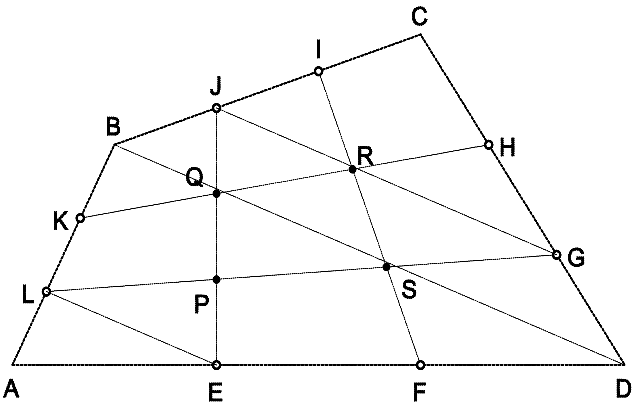
og efter (1) fås

$$[EFIJ] = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3}[ABCD] = \tfrac{1}{3}[ABCD].$$

Vi ønsker at vise, at P og Q er tredelingspunkter for EJ og at S og R er tredelingspunkter for FI. Så kan vi nemlig ved præcis samme slutningsmåde som oven for udlede, at

$$[PQRS] = \tfrac{1}{3}[EFIJ]$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3}[ABCD] = \tfrac{1}{9}[ABCD].$$



Der gælder, at $AE = \tfrac{1}{3}AD$ og $AL = \tfrac{1}{3}AB$, hvilket medfører, at $EL \parallel BD$ og $EL = \tfrac{1}{3}BD$. På samme måde er $CG = \tfrac{2}{3}CD$ og $CJ = \tfrac{2}{3}CB$, så $GJ \parallel BD$ og $GJ = \tfrac{2}{3}BD$.

Dermed har vi, at $EL \parallel GJ$ og $EL = \tfrac{1}{2}GJ$. Derfor er ΔPLE og ΔPGJ ensvinklede i forholdet 1:2, så $PE = \tfrac{1}{2}PJ$ eller $PE = \tfrac{1}{3}EJ$. På samme måde er $JQ = \tfrac{1}{3}EJ$ og $FS = \tfrac{1}{3}FI = IR$.

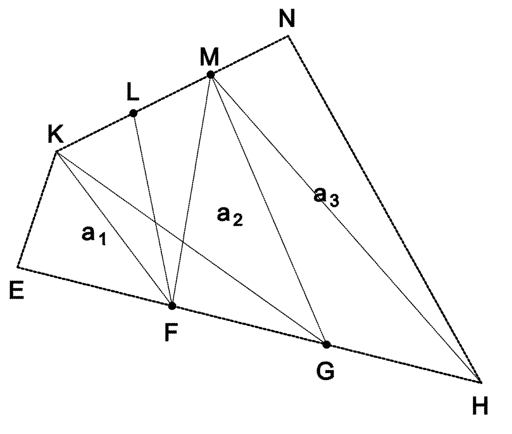
Dermed er som ønsket Q og P tredelingspunkter på EJ og R og S tredelingspunkter på FI.

***2. metode* (Asger Olesen, Tønder).**

Vi ser først på en □KEHN, hvor L og M er tredelingspunkter for KN og F og G tredelingspunkter for EH. Vi betegner med a_1, a_2 og a_3 arealerne

$$a_1 = [EFLK], \quad a_2 = [FGML],$$

$$a_3 = [GHNM].$$



Vi viser, at $a_1 + a_3 = 2a_2$. Vi har nemlig, at

$$[EFK] = \tfrac{1}{3}[EHK], \quad [KLF] = [LMF]$$

$$[GHM] = [FGM], \quad [MNH] = \tfrac{1}{3}[KNH].$$

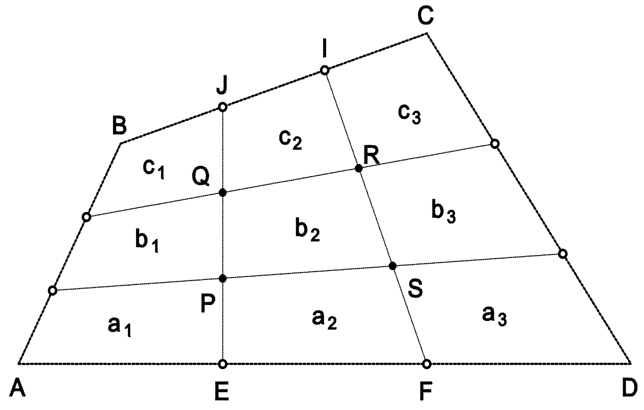
Så får vi

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= ([EFK] + [KLF]) + ([GHM] + [MNH]) \\ &= \tfrac{1}{3}[EHK] + [LMF] + [FGM] + \tfrac{1}{3}[KNH] = \tfrac{1}{3}([EHK] + [KNH]) + [LMF] + [FGM] \\ &= \tfrac{1}{3}[KEHN] + [FGML] = \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) + a_2 \end{aligned}$$

Altså har vi

$$a_1 + a_3 = \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) + a_2 \quad \text{hvoraf} \quad a_1 + a_3 = 2a_2 .$$

Nu ser vi på den oprindelige figur og betegner arealerne af firkanterne med a_1, a_2,. . . , c_1, c_2, c_3 som vist. Idet vi går ud fra, at P og Q er tredelingspunkter og at R og S er tredelingspunkter, har vi efter ovenstående, at



$a_1 + a_3 = 2a_2$, $a_1 + c_1 = 2b_1$

$b_1 + b_3 = 2b_2$, $a_2 + c_2 = 2b_2$

$c_1 + c_3 = 2c_2$, $a_3 + c_3 = 2b_3$.

Vi kan så regne således:

$$\begin{aligned}[ABCD] &= a_1 + a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 + c_1 + c_2 + c_3 \\ &= (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) + (a_3 + c_3) + (b_1 + b_3) + b_2 \\ &= 2b_1 + 2b_2 + 2b_3 + 2b_2 + b_2 = 2(b_1 + b_3) + 5b_2 = 4b_2 + 5b_2 = 9b_2 = 9\,[PQRS] .\end{aligned}$$

***3. metode* (Anders Crone, Kalundborg).**

Lad E, F, G og H være punkterne på figuren nedenfor.

Så er $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH} = -\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

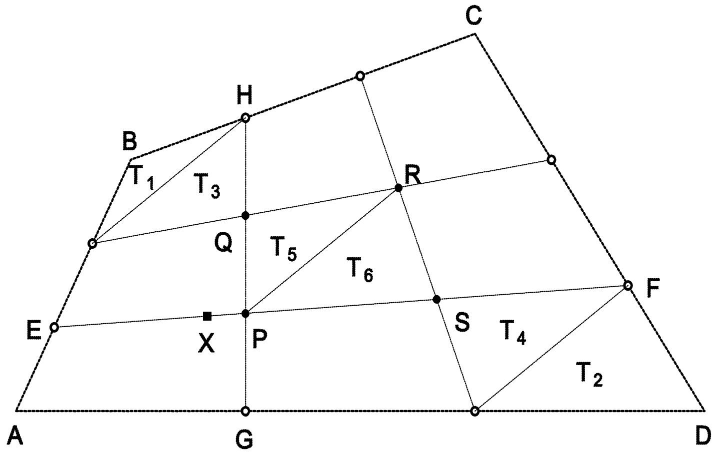
Lad nu X være det tredelingspunkt på EF, der ligger nærmest E. Så er

$$\overrightarrow{EX} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{EF}$$

og

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GX} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AE} + \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) \\ &= -\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \tfrac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{DC} = \tfrac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{DC} \qquad (2) \\ &= \tfrac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{BC} - \tfrac{1}{9}\overrightarrow{AD} \\ &= \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{GH} .\end{aligned}$$

Punktet X ligger altså også på GH og er derfor skæringsspunktet mellem GH og EF, så det falder sammen med P. Hermed er vist, at P er et tredelingspunkt for EF og for GH. På analog måde kan man vise, at også Q, R og S er tredelingspunkter for de linjestykker, de ligger på.
Af (2) følger så, at



$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{GP} = \tfrac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{DC} \ ,$$

og analogt at

$$\overrightarrow{QR} = \tfrac{2}{9}\overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{AD} \ , \ \overrightarrow{RS} = \tfrac{2}{9}\overrightarrow{CD} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{BA} \ , \ \overrightarrow{SP} = \tfrac{2}{9}\overrightarrow{DA} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{CB} \ .$$

Dette giver, at

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \tfrac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{DC} + \tfrac{2}{9}\overrightarrow{BC} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{AD}$$
$$= \tfrac{2}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \tfrac{1}{9}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \tfrac{2}{9}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{9}\overrightarrow{AC} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} \ .$$

Analogt fås

$$\overrightarrow{QS} = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{BD} \ .$$

Endelig får vi så, at

$$[PQRS] = \tfrac{1}{2}\det(\overrightarrow{QS}, \overrightarrow{PR}) = \tfrac{1}{2}\det(\tfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}, \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}) = \tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{1}{2}\det(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}) = \tfrac{1}{9}[ABCD].$$

Det er intet sted benyttet, at □ABCD er konveks, så arealforholdet gælder også for ukonvekse firkanter. Det gælder også, hvis firkanten udarter til en trekant ved at en side skrumper sammen til et punkt eller hvis en vinkel bliver 180°.

Der er andre arealforhold, der er konstante, uafhængig af firkantens form. En 'midterstribe' bestående af □PQRS og to nabofirkanter har altid et areal, der er $\tfrac{1}{3}$ af firkantens areal. Det udregnes forholdsvis let ved hjælp af determinanter for vektorer.

Summen af arealerne af to diagonalt beliggende små firkanter er $\tfrac{2}{9}$ af firkantens areal. Med betegnelserne på figuren er

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = (T_1 + T_2) + (T_3 + T_4) = (T_1 + T_2) + (T_5 + T_6)$$
$$= \tfrac{1}{9}[ABCD] + [PQRS] = \tfrac{2}{9}[ABCD] \ .$$

Der er modtaget svar fra 6 indsendere.