Svar på opgave 235 (December 2006)

Opgave:

a.

Vis, at hvis *a*, *b* og *c* er positive reelle tal og *abc* = 1, så er

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c\ .$$

b.

Lad *a*, *b* og *c* være reelle tal, der ikke alle er ens, så

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}\ .$$

Vis, at $a+\frac{1}{b}=-abc$.

Besvarelse:

a.

Hvis *a*, *b* og *c* er positive reelle tal, så *abc* = 1, skal vi vise, at der gælder

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c\ .$$

Uligheden er symmetrisk i *a*, *b* og *c*, dvs. hvis *a*, *b* og *c* forskydes cyklisk, ændres den ikke. Vi kan altså gå ud fra, at enten er $a\leq b\leq c$ eller $a\geq b\geq c$. Da *abc* = 1 gælder i begge tilfælde, at

$$(1-a)(1-c)\leq 0\ .$$

Thi hvis $(1-a)(1-c)\leq 0$, ville der gælde, at

enten ville $1-a>0$ og $1-c>0$, så $a<1$ og $c<1$ og dermed $b<1$. Men så kan *abc* = 1 ikke være opfyldt.

eller $1-a<0$ og $1-c<0$, så $a>1$ og $c>1$ og dermed $b>1$. Igen en modstrid med at *abc* = 1.

1. metode. Nu viser vi dobbeltuligheden

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq a+\frac{1}{c}+\frac{c}{a}\geq a+b+c\ .$$

Venstre ulighed. Vi har, at

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\ge a+\frac{1}{c} \iff ac+b^2\ge abc+b \iff ac+b^2\ge 1+b$$

$$\iff \frac{1}{b}+b^2\ge 1+b \iff b^3-b^2-b+1\ge 0 \iff (1+b)(1-b)^2\ge 0\ .$$

Denne ulighed er sand, da b er positiv.

Højre ulighed. Vi har, at

$$\frac{1}{c}+\frac{c}{a}\ge b+c \iff a+c^2\ge abc+ac^2 \iff a+c^2-1-ac^2\ge 0$$

$$\iff a(1-c^2)+c^2-1\ge 0 \iff (1-a)(1-c^2)\le 0 \iff (1-a)(1-c)(1+c)\le 0\ .$$

Da c er positiv og produktet af de to første parenteser efter bemærkningerne oven for er ikke-positivt, er denne ulighed sand.

2. metode. Vi benytter uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal, og får

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)\ge\sqrt[3]{\frac{a^2b}{b^2c}}=\sqrt[3]{\frac{a^3}{abc}}=a\ ,$$

og de analoge

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge b \quad \text{og} \quad \frac{1}{3}\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)\ge c.$$

Ved addition af de tre uligheder fås det ønskede.

b.

Vi skal vise, at hvis a, b og c er reelle tal, der ikke alle er ens, og

$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}\ ,$$

så er $a+\frac{1}{b}=-abc$.

Vi sætter

$$p=a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}\ .$$

Ved multiplikation med a, b og c får vi

$$ab+1=pb \quad , \quad bc+1=pc \quad , \quad ca+1=pa\ .$$

Subtraktion af ligningerne to og to giver

$$b(a-c)=p(b-c) \quad , \quad c(b-a)=p(c-a) \quad , \quad a(c-b)=p(a-b)\ .$$

Disse ligninger ganges med hinanden:

$$abc(a-c)(b-a)(c-b)=p^3(b-c)(c-a)(a-b)\ . \tag{1}$$

Desuden giver de oprindelige ligninger

$$a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b - c}{bc} \ , \ b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c - a}{ca} \ , \ c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab} \ ,$$

og multiplikation af disse ligninger giver

$$(a - b)(b - c)(c - a) = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{(abc)^2} \ . \qquad (2)$$

Hvis to af tallene a, b og c er lige store, er de alle tre lige store. Derfor får vi ud fra, at de tre tal er indbyrdes forskellige, så $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$. Af (2) får vi så, at

$$abc = \pm 1 \ .$$

Af (1) får vi, at

$$p^3 = -abc \quad \text{så} \quad p = \mp 1 \ ,$$

og heraf følger, at $p = -abc$.

Svar modtaget fra 7 personer

Læs flere svarmuligheder i MatematikMagasinet 32 for februar 2007.